

カルマン・フィルタと確率的効率性モデルを用いる企業効率性評価

Estimation of firms efficiencies using Kalman filter and a stochastic efficiency model

上田 徹*1、星野 健一*2、

Tohru UEDA *1, Kenichi HOSHINO*2

ABSTRACT: Firms are being operated over long years. Thus, we should evaluate their efficiencies, based on their historical data relating to finance. We shrink each historical data into a distribution function with a mean and a variance estimated by Kalman filter. Then, we apply stochastic efficiency model for shrunk data. We propose a new efficiency measure and compare it with existing measures, applying them to three kinds of firms..

KEYWORDS: Data Envelopment Analysis; Forecasting; Kalman filter; efficiency

(Received November 5, 2002)

1. まえがき

企業は様々な観点から評価されるべきであるが、その点で包絡分析法(Data Envelopment Analysis, 略称 DEA)は様々な入出力を扱えるため有望な手法である。DEA は基本的には企業間のクロスセクショナルな分析法であるが、企業には歴史があり、時系列データも存在する。

DEA における時系列データの分析法としてはウインドー分析法がよく知られているが、この方法は過去のトレンド分析には適している反面、予測に基づく将来の効率性評価には向いていない (DEA の解説書としては刀根, 1993 など参照)。

これに対してカルマン・フィルタは予測値の自乗誤差和の期待値を最小にするばかりでなく予測値の分散も導出してくれるので予測値に関する議論がしやすいという利点を持っている。予測値の期待値ばかりでなく分散も得られるので確率的効率性モデルを使うことが出来る。

本論文では、いくつかの業種について カルマン・フィルタと確率的効率性モデル (Morita and Seiford, 1999)を用いる企業効率性評価法の有効性を検討する。また、確率的効率性モデルにおける効率性の新しい尺度についても提案する。

2. カルマン・フィルタの概要

カルマン・フィルタはシステム (構造) 方程式と観測方程式で表現される (Kitagawa and Gersch, 1984)。

時点 n でのシステム方程式は

$$\mathbf{x}(n+1) = F\mathbf{x}(n) + GU(n) \quad (1)$$

観測方程式は

$$y(n) = H(n)^t \mathbf{x}(n) + w(n) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、

$$\mathbf{x}(n)^t = (T(n), T(n-1), L(n)), \quad (3)$$

$T(n)$: 時点 n でのトレンド項

$$\nabla^k T(n) = u(n) \sim N(0, \tau^2), \quad (4)$$

(本論文では $k=2$)

*1 情報処理専攻教授 (Professor, Dept. of Information Sciences)

*2 情報処理専攻大学院生[現在: CTC]
(Graduate Student, Dept. of Information Sciences)

[$N(0, \tau^2)$: 平均 0、分散 τ^2 の正規分布、

$$\nabla T(n) = T(n) - T(n-1),$$

$L(n)$: 時点 n での偶発事象を表す項]

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$G^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U(n)^t = (u(n), 0), \quad (6)$$

$$H(n)^t = (1, 0, d(n, N)); \quad (7)$$

$$d(n, N) = 1 \quad n = N, \quad (8)$$

$$0 \quad n \neq N.$$

$$w(n) \sim N(0, \omega^2) \quad w(n) \sim N(0, \omega^2) \quad (9)$$

である。

時点 $(n-1)$ での $y(n)$ の予測値の平均と分散は

$$y(n|n-1) = H(n)^t \mathbf{x}(n|n-1) \quad (10)$$

$$R(n|n-1) = H(n)^t P(n|n-1)H(n) + \omega^2 \quad (11)$$

であり、これらの値は以下のように逐次、更新される (上田, 1994)。

(時間更新)

$$\mathbf{x}(n|n-1) = F\mathbf{x}(n-1|n-1)$$

$$P(n|n-1) = FP(n-1|n-1)F^t + GQG^t$$

ただし、 Q は $U(n)$ の分散-共分散行列

(観測値更新)

$$\mathbf{x}(n|n) = \mathbf{x}(n|n-1) + K(n)\{y(n) - y(n|n-1)\}$$

$$P(n|n) = P(n|n-1) - K(n)H(n)^t P(n|n-1)$$

$$K(n) = P(n|n-1)H(n) / \{H(n)^t P(n|n-1)H(n) + \omega^2\}$$

3. 確率的効率性モデル

各 DMU (Decision Making Units、企業などの意思決定主体) $O (=1, 2, \dots, n)$ は

$$\text{平均 } \mathbf{X}_O = (x_{1O}, x_{2O}, \dots, x_{mO}),$$

$$\text{変動 } \Delta \mathbf{X}_O = (\Delta x_{1O}, \Delta x_{2O}, \dots, \Delta x_{mO})$$

を持つ正規分布に従う入力と、

$$\text{平均 } \mathbf{Y}_O = (y_{1O}, y_{2O}, \dots, y_{sO}),$$

$$\text{変動 } \Delta \mathbf{Y}_O = (\Delta y_{1O}, \Delta y_{2O}, \dots, \Delta y_{sO})$$

を持つ正規分布に従う出力を持つものとする。また、 Σ_O をそれらの分散-共分散行列とし、 $\delta = (\Delta \mathbf{X}_O, \Delta \mathbf{Y}_O)$ とする。 δ の確率 α の信頼区間は

$$S_\alpha = \{\delta \mid \delta \Sigma_O^{-1} \delta^t \leq \chi_{m+s}^2(\alpha)\}$$

で与えられるので、 α の確率で最悪の入出力は $(\mathbf{X}_{O\alpha}, \mathbf{Y}_{O\alpha})$

$$= (\mathbf{X}_O + \Delta \mathbf{X}_O, \mathbf{Y}_O - \Delta \mathbf{Y}_O \mid \delta \Sigma_O^{-1} \delta^t \leq \chi_{m+s}^2(\alpha))$$

で与えられる。 S_α 内で得られる最悪の効率値を W_α とする。

入出力数 $(m+s)$ と比べて DMU 数 n が小さいときには、通常の DEA ではかなり多くの DMU が効率的と評価され、区別ができなくなってしまう。そこで Morita and Seiford (1999) に倣って確率的効率性評価を行うこととする。まず、CCR モデルで効率的な DMU に対して、 S_α 内で $W_\alpha = 1$ となる最大の α_{\max} を求める。 α_{\max} が大きければ大きいほど効率的な状態は安定していると言える。CCR モデルでは次のように定式化できる。

[Problem 1]

$$\max \quad \alpha$$

$$\text{subject to } W_\alpha = \mathbf{u}^t \mathbf{Y}_{O\alpha} = 1,$$

$$\mathbf{v}^t \mathbf{X}_{O\alpha} = 1,$$

$$\mathbf{v}^t \mathbf{X}_j \geq \mathbf{u}^t \mathbf{Y}_j; j \neq O,$$

$$\delta \Sigma_O^{-1} \delta^t \leq \chi_{m+s}^2(\alpha),$$

ただし、 \mathbf{X}_j と \mathbf{Y}_j は DMU j の入出力である。

ここで、Problem 1 用の新しい効率性尺度 \tilde{W}_O を提案する。Problem 1 を解いて得られた乗数 \mathbf{v}^* と \mathbf{u}^* を使って

$$\tilde{W}_O = (\mathbf{u}^{*t} \mathbf{Y}_O) / (\mathbf{v}^{*t} \mathbf{X}_O). \quad (12)$$

とする。この尺度は半正 (少なくとも 1 個の要素が正) の δ に対して 1 よりも大となる。

4. 適用例

以下の 3 企業分類

(1) 31 電気電子機器会社

(2) 19 百貨店

(3) 38 スーパーマーケット

を検討対象とする。

以下の7経営指標を用いる。

$$y_1: \text{金融費用負担率} = \frac{\text{金融費用}}{\text{売上高}} \times 100$$

$$y_2: \text{経常収支比率} = \frac{\text{経常収入}}{\text{経常収支}} \times 100$$

$$y_3: \text{1人当たりキャッシュフロー} = \frac{\text{キャッシュフロー}}{\text{期首末期平均(従業員数 + 役員数)}}$$

$$y_4: \text{1人当たり売上総利益増加率} = \left(\frac{\text{今期の売上総利益}}{\text{期首末期平均従業員役員数}} + \frac{\text{前期の売上総利益}}{\text{期首末期平均従業員役員数}} - 1 \right) \times 100$$

$$y_5: \text{1人当たり有無形固定資産増加率} = \left(\frac{\text{今期の期首末期平均有無形固定資産}}{\text{期首末期平均従業員役員数}} + \frac{\text{前期の期首末期平均有無形固定資産}}{\text{期首末期平均従業員役員数}} - 1 \right) \times 100$$

$$y_6: \text{剰余純資本構成比率} = \frac{\text{総剰余金}}{\text{純資本}} \times 100$$

総剰余金
= 資本準備金 + 利益準備金 + その他の剰余金計

$$y_7: \text{流動資産対非流動資産差額変化率} = \frac{\text{流動資産増分} + \text{非流動資産増分}}{\text{期首流動資産}} \times 100$$

本検討ではすべての入力は1とし、これらの経営指標は出力とした。ただし、 $y_j (j=1,7)$ は $([\text{全DMUの}y_j\text{の最大値}] - [\text{当該DMUの}y_j\text{の値}])$ で置換した。

1986年～2000年の経営指標データごとに節2のカルマン・フィルタを用いて2001年の指標の予測値(期待値 $y(2001|2000)$ と分散 $R(2001|2000)$) を求めた。それらから求められる変動係数

$$CV = \sqrt{R(2001|2000)} / y(2001|2000)$$

を表1、表2に示す。

たとえば、図1に示されたマブチ・モーターの y_1

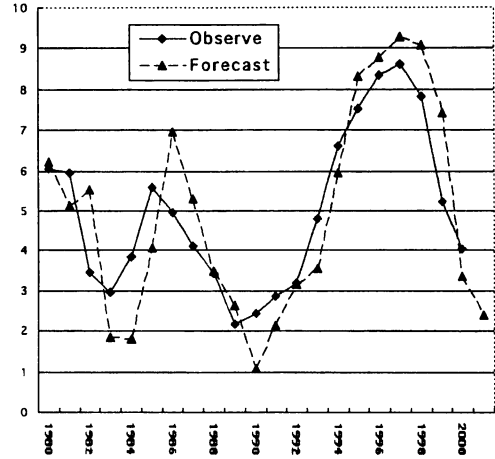


図1 マブチモーターの項目 y_1 の観測値と予測値

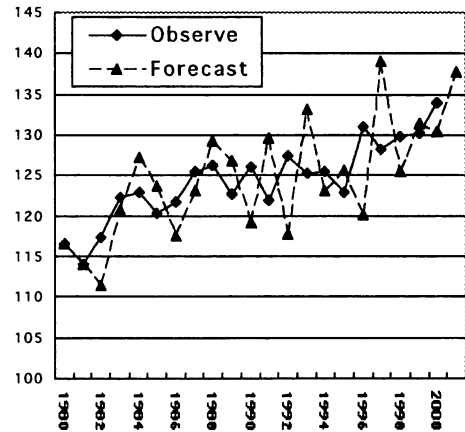


図2 マブチモーターの項目 y_2 の観測値と予測値

については

$R(2001|2000)=3.06$, $y(2001|2000)=2.39$ であり、 $CV=0.732$ である。

これらの図表から分かるように予測値は大きな変動係数を持つが、それは観測値自身が大きな変動をしているからである。しかし、いくら変動が大きくてもこのような大きな変動を考慮した予測を行わなければならないし、 α_{\max} の推定には $R(2001|2000)$ と $y(2001|2000)$ を用いなければならない。

CCRモデルで効率的であったDMUに対する評価結果を表3、表4、表5に示す。比較のためにAndersen

and Petersen (1993) に提案された超効率値もこれらの表に示される。

α_{\max} は零の値をとるDMUがいくつか出現するため効率性の比較の尺度としては適切ではない。超効率値は東芝テックのように非常に大きな値

を取ることがある。しかし、本論文で提案した $\bar{\mu}_0$ は超効率値よりも穏やかな値をとっており、これが $\bar{\mu}_0$ の長所であると考えている。

表 1. 企業分類 (1) の予測値の変動係数

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
msc.panasonic	0.467	0.049	0.014	0.432	0.875	0.021	1.691
Toshibatec	0.108	0.049	0.012	0.292	0.080	0.047	0.218
Mabuchi-Motor	0.732	0.046	0.005	0.777	0.223	0.021	0.257
Matsushita	0.222	0.048	0.015	0.181	0.312	0.016	0.142
Sharp	0.216	0.046	0.008	0.573	0.502	0.030	0.853
Sony	0.334	0.051	0.012	0.308	0.275	0.028	8.477
Aiwa	1.665	0.056	0.010	0.188	0.664	0.046	0.246
Sanyo	0.192	0.047	0.012	0.178	1.208	0.029	0.251
kme.panasonic	0.192	0.048	0.015	5.951	0.396	0.026	1.225
Pioneer	0.466	0.048	0.022	0.253	0.264	0.107	1.455
Columbia	0.462	0.058	0.039	0.665	0.907	0.066	0.150
JvcVictor	0.438	0.049	0.017	0.828	0.568	0.025	0.200
Foster	0.363	0.050	0.012	0.173	0.319	0.035	0.876
Clarion	0.120	0.053	0.008	0.352	0.471	0.049	0.243
Marantz	0.094	0.051	0.012	0.344	0.271	0.027	0.150
Yokowo	0.136	0.050	0.022	19.03	0.988	0.035	0.310
Zojirushi	0.248	0.055	0.019	0.222	1.951	0.021	0.285
Teak	0.153	0.055	0.008	0.220	0.323	0.041	0.391
mke.panasonic	0.218	0.048	0.007	0.456	5.999	0.032	0.177
TOA	0.104	0.058	0.017	0.159	0.185	0.036	0.990
Nakamichi	0.542	0.053	0.009	0.147	0.636	0.085	0.511
mrc.panasonic	0.179	0.047	0.037	0.106	3.194	0.022	0.163
Rion	0.131	0.056	0.016	35.16	0.132	0.024	0.153
Enplas	0.200	0.045	0.007	0.231	0.256	0.029	0.26
Hitachi	2.243	0.047	0.017	0.245	0.513	0.023	0.295
Toshiba	1.944	0.046	0.011	1.410	0.326	0.030	0.142
Melco	1.491	0.045	0.068	7.726	0.467	0.031	0.147
Fujielectric	0.614	0.054	0.012	0.086	0.195	0.047	1.285
NEC	0.883	0.051	0.011	0.123	0.724	0.038	0.492
Fujitsu*	-	0.050	0.059	0.250	0.235	0.031	1.422
Okii	0.799	0.054	0.010	0.078	0.517	0.087	0.203
mean of CV	0.532	0.05	0.018	2.489	0.773	0.038	0.763

* $E(y_1)=0$ なので、 $CV(y_1)$ は計算できなかった。

表 2. 企業分類ごとの予測値の変動係数の平均

企業分類	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
(1)	0.532	0.050	0.018	2.489	0.773	0.038	0.763
(2)	0.560	0.049	0.039	1.430	2.357	0.051	0.967
(3)	0.515	0.056	0.054	3.273	1.466	0.066	0.889

表 3. 企業分類 (1) における効率性尺度間の比較

Rank	α_{max}		超効率値		Proposed measure, \bar{w}_o	
1	Toshibatec	84.82%	Toshibatec	3.846	Mabuchi-motor	1.860
2	Mabuchi-motor	51.55%	Mabuchi-motor	2.546	Nakamichi	1.813
3	Matsushita	9.54%	Nakamichi	2.116	Toshibatec	1.758
4	Nakamichi	3.83%	Matsushita	1.550	Matsushita	1.694
5	Toshiba	1.30%	Toshiba	1.454	Toshiba	1.586
6	Marantz	0.00%	Marantz	1.074	Marantz	1.076
7	Fujitsu	0.00%	Melco	1.050	Melco	1.056
8	Hitachi	0.00%	Fujitsu	1.032	Fujitsu	1.033
9	Melco	0.00%	Hitachi	1.024	Hitachi	1.025
10	Msc. Panasonic	0.00%	Msc. panasonic	1.021	Msc. panasonic	1.020
11	Enplas	0.00%	Enplas	1.008	Enplas	1.008

表 4. 企業分類 (2) における効率性尺度間の比較

Rank	α_{max}		超効率値 y		Proposed measure, \bar{w}_o	
1	Izutsuya	0.80%	Izutsuya	1.906	Izutsuya	1.535
2	Hankyu-Dept	0.39%	Hankyu-Dept	1.395	Hankyu-Dept	1.452
3	Matsuzakaya	0.12%	Isetan	1.331	Matsuya	1.336
4	Matsuya	0.03%	Matsuya	1.318	Isetan	1.306
5	Sogo	0.01%	Daimaru	1.233	Nagano-Tokyu	1.292
6	Isetan	0.01%	Nagano-Tokyu	1.212	Daimaru	1.267
7	Nagano-Tokyu	0.00%	Matsuzakaya	1.198	Matsuzakaya	1.236
8	Daimaru	0.00%	Platz-Kintetsu	1.154	Sogo	1.153
9	Platz-Kintetsu	0.00%	Sogo	1.141	Iwataya	1.147
10	Iwataya	0.00%	Iwataya	1.099	Platz-Kintetsu	1.145
11	Tokyu-Depart	0.00%	Tokyu-Depart	1.078	Tokyu-Depart	1.078
12	Daiwa-Dp	0.00%	Daiwa-Dp	1.044	Takashimaya	1.052
13	Takashimaya	0.00%	Takashimaya	1.034	Daiwa-Dp	1.043
14	Saikaya	0.00%	Saikaya	1.029	Saikaya	1.034

表 5. 企業分類 (3) における効率性尺度間の比較

Rank	α_{\max}		超効率値		Proposed measure, \tilde{w}_o	
	1	Itoyokado	11.17%	Itoyokado	2.070	Yamazawa
2	Yorkbeni	0.67%	Yamazawa	1.822	Jujiya	1.837
3	Jujiya	0.19%	Jujiya	1.817	Itoyokado	1.547
4	Seiyu	0.01%	Yorkbeni	1.509	Yorkbeni	1.529
5	Marukyo	0.00%	Seiyu	1.242	Seiyu	1.228
6	Yamazawa	0.00%	Marukyo	1.222	Marukyo	1.205
7	SuperDaiei	0.00%	SuperDaiei	1.191	SuperDaiei	1.181
8	Taiyo	0.00%	Taiyo	1.181	U-Store	1.179
9	U-Store	0.00%	U-Store	1.152	Taiyo	1.165
10	Mycal	0.00%	Mycal	1.123	Mycal	1.127

5. まとめ

確率的効率性評価法では分散の推定が必要なため分散推定をその手順の中に持っているカルマン・フィルタを用いた。カルマン・フィルタの定式化は節2に限らないことをここに述べておく。

DEA は各 DMU の長所を強調し、短所は軽視する方法なので、優れた企業同士の評価には適しているが、倒産しそうな企業を発見するというような役割を担わせるには無理がある。実際、破綻した「そごう」や「マイカル」も効率的と評価してしまった。単一入力の場合には DEA の効率値の代りに、各出力をその入力で割った変数を説明変数とする Z 値のような線形判別関数を決めることにより倒産の可能性を判別することが出来る。

判別関数の導出も行ったが、その報告は別の機会に譲りたい。

参考文献

- 刀根薫, 1993. 「経営効率性の測定と改善—包絡分析法 DEA による—」, 日科技連出版社, 東京.
- Morita, H. and Seiford, L. M., 1999. Characteristics on stochastic DEA efficiency—reliability and probability being efficient—, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 42 (4) 389-404.
- Kitagawa, G., Gersch, W., 1984. A smoothness priors—state space modeling of time series with trend and seasonality. *Journal of the*

American Statistical Association, 79 (386) 378-389.

上田 徹, 1994. 「予測手法(1):時系列予測法」、オペレーションズ・リサーチ, 310-315.

Andersen, P., and Petersen, N. C., 1993. A procedure for ranking efficient units in Data Envelopment Analysis, *Management Science*, 39 (10) 1261-1264.