

エンジニアの道草ノート

— 回転とオイラーの公式 —

青木 正喜*

Off the track note of an engineer
- Rotation and Euler's formula -

Masayoshi AOKI*

概要：工学の分野において回転は基本の一つである。本稿では回転の数学的な表記法として、複素数空間における複素回転ベクトルに焦点を当て、オイラーの公式とその応用例を示す。また複素数の逆数による直線から円への写像についても述べる。

はじめに

オイラーの公式

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q$$

は、複素数平面で原点を中心とする半径 1 の単位円周上の点の 2 つの表記法を結び付けている。 $\theta = \omega t$ と置く事により、複素数平面における回転ベクトル（複素回転ベクトル）となり、正弦波関数の上位概念が導かれる。オイラーの公式を用いる事により、加法定理、回転の公式等が容易に導かれる。本稿ではオイラーの公式を中心に据え、回転、正弦波関数等に関して、基礎事項として参照される頻度が高い式の導出プロセスを簡潔にまとめた。なお、複素数の四則演算と合同規則、指数法則、指数関数の微分・積分に関しては予備知識があると仮定している。結果としての式のみを参照せずに、その導出プロセスに立ち返ることにより理解が深まる。本稿が少しでも読者のお役にたてれば幸いである。オイラーの公式に関する詳細な記述は文献 1 を参照されたい。本稿の英語の表記に関しては文献 3 を参考にした。

1. 円 (circle)

円は二次元平面 (two-dimensional plane) において最も均整のとれた図形 (figure) の一つである。中心からの距離一定という性質から、コンパスや一端を固定した糸の

他端に結び付けたペン等で作図される。円は、中心の位置と、中心からの距離すなわち半径 (radius) によって定まる。直行カルテシアン座標系 (rectangular Cartesian coordinate system) 上の一点は x 座標と y 座標の順序付きの組 (ordered pair) として (x, y) で与えられる。原点を中心とする半径 1 の正規化された単位円 (unit circle) は陰関数 (implicit function) として次のように表される。

$$x^2 + y^2 = 1$$

半径が r であれば次式で表される。

$$x^2 + y^2 = r^2$$

さらに中心が (x_0, y_0) であれば次式で表される。

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

円の中心と基準となる円周上の点 (適当に定めてよい) とを結ぶ線を基準線とすることにより、単位円の円周上の点はその点と中心を結ぶ直線と基準線とのなす中心角 (central angle) θ で表される。直交カルテシアン座標系における単位円とは、中心を原点、基準点を $(1, 0)$ 、基準線を x 軸とすることにより対応づけができる。平面極座標系 (plane polar coordinate system) では、中心からの長さ (単位円では 1) と基準線からの角度の順序付きの組として $(1, \theta)$ と書ける。以後、中心、基準点、基準線はこのように用いる。半径が r の円周上の点は (r, θ) となる。これらは簡易的に $1 \angle \theta$, $r \angle \theta$ とも書ける。

2. 角 (angle)

角または角度の単位としては度 (degree) と弧度 (radian) が用いられる。

度 (記号 $^\circ$) は直角が 90 度、一回転が 360 度で、下

*情報科学科教授 (Professor, Dept. of Computer and Information Science), e-mail address: masa@ee.seikei.ac.jp, masa@st.seikei.ac.jp

位の単位は分 (minute 記号 ' 1 度= 60 分), 秒 (second 記号 " 1 分= 60 秒) と 60 進法である。地図では緯度, 経度にこれらの下位の単位がよく用いられる。我々が日常用いている, 角を度で測る度数法は数学的な根拠は明白ではなく, 天文学で一年を 360 日として, 一日を一度とすることを起源とする慣習と言われている⁽¹⁾。360 という数には 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 と多くの約数 (divisor) がある。時間も下位の単位は 60 進法の分, 秒である。ただし時間 (hour) 自体には 12 進法または 24 進法が用いられている。温度 (temperature) に関しても度 (° C Celsius), (° F Fahrenheit) が用いられる。SI 単位系では温度には (K Kelvin) が用いられ, K の前に (°) は付かない。SI 単位系では基本単位, 補助単位, 補助記号の他の記号は使わない。温度に関しては, 小数点以下は十進法が用いられる。なお C のみだと電荷の単位 Coulomb, F のみだと電気容量の単位 Farad である。度量衡の度は角ではなく物差, 測るの意味である。

弧度 (circular measure, or radian) は, 単位円の弧 (arc) の長さを弧に対応する中心角として用いる。単位はラジアン (radian) で, 語源は半径である。円の半径が r の場合には, 弧の長さ l を r で割って $\frac{l}{r}$ と正規化すれば一貫性を持って同じ角に対応する。単位円において, 中心角が θ ラジアンであれば, 対応する弧の長さは θ であり, 円の半径が r の場合には弧の長さは $r\theta$ となる。1 ラジアンは単位円で弧の長さが 1 の中心角であり, 中心角 60° に対応する弧の長さは円周 (circumference) 2π の $\frac{1}{6}$,

$\frac{p}{3} > 1$ であるから, 1 ラジアンは 60° より小さい。正

確には円周 2π ラジアンが 360° であるから,

$$1 \text{ ラジアン} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57.2957 \dots^\circ$$

である。

3. 三角比 (trigonometric ratio)

直角三角形 (rectangular triangle) ABC において $\angle C$ を直角, $\angle B = \theta$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ としたとき

$$\sin \theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

が三角比である。言い換えれば角を辺の長さの関係で表している。sin は sine (正弦), cos は cosine (余弦), tan は tangent (正接) と, それぞれ英語の単語の初めの 3 文字を用いている。サインという名の由来は,

ギリシャ語の jiva (ジャイバ, 弓の「弦」)

→アラビア語の jayb (ジャイブ, 「凹所, 入り江」)

→ラテン語の sinus (シヌス, 「凹所, 入り江」)

→英語の sine

→e を省略 sin

と言われている⁽²⁾。

斜辺の長さを 1 に正規化し, B を単位円の中心 O, BC を x 軸上に置き, 点 (1, 0) を基準点 O' とすると, A は単位円の円周上にある。ここでは $\sin \theta$ に焦点を当てる。 $c = 1$ であるから

$$\sin \theta = b$$

となり, 直角三角形の一辺 CA の長さとなる。中心角を θ ラジアンとする扇形 (sector) AOO' の弧の長さは θ で b (CA の長さ) < 扇形の弦 (chord) の長さ < θ (弧の長さ)

の関係が成立する。(ただし, 扇形の弦の長さは AO' の長さ)

ラジアンで表した角 θ が十分小さい場合には, これら 3 つの量は極めて接近し

$$\sin \theta \approx \theta$$

となり, θ (ラジアン) が $\sin \theta$ のよい近似となる。例え

ば $\theta = 1$ 度の場合, $\sin \theta = 0.017452$, $\frac{\theta}{180} = 0.017453$ ラジ

アンであり, 小数第 1 位の 0 を除くと 4 桁目まで一致し

ている。 $\theta = 10$ 度でも, $\sin \theta = 0.17365$, $\frac{\theta}{18} = 0.17453$ ラ

ジアンと小数第 2 位まで一致している。

4. 回転 (rotation) と正弦波関数 (sinusoidal function)

単位円の円周上の点 (1, θ) を (x , y) に変換すると

$$x = \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

となる。(1, θ), (x , y) 共に単位円の円周上の一点を表すが, ここで

$$q(t) = \omega t$$

と θ を時間関数 (時間に比例) とすると, 点は単位円の円周上を一定の速度で回転する。回転速度は単位時間当たりの距離ではなく, 単位時間当たりに中心の周りを回転する角速度を用い, 記号 ω , 単位 radian/s (または rad/s) を用い, 角周波数ともいわれる。円運動に関しては角速

度が、正弦波関数に関しては角周波数が多く用いられる。 $\omega = 2\pi$ の時、点は1秒間に反時計方向に1回転する。平面極座標系で単位円上での回転(1, ωt)を直交カルテシアン座標系の $(x(t), y(t))$ で表すと

$$x(t) = \cos \omega t$$

$$y(t) = \sin \omega t$$

となり、 x 座標、 y 座標が、時間関数としての余弦波関数、正弦波関数となる。これは円周上を一定角速度で運動している点を、同一平面上の遠くの一点から見る(平行投影 parallel projection)と周期的な増加と減少の繰り返しが観測されることを意味する。関数としての正弦と余弦の違いは、どこから見るかの違いだけであり、基になっている回転運動は同じであるので、これを一般化して正弦波関数と呼び両方の総称とする。時間関数としての正弦波関数は音叉の振動による音波、商用電源の電圧等広く存在する。生物界では、DNAにおける螺旋、胴体や茎・幹の断面に円形は見られるが、回転運動は明確な形では存在しない。天体の運動に見られる様に物体の運動としては、広く存在している。また単振動、振り子の振動、波、その他として、物体の運動の多くが少なくとも近似的には正弦波関数に従っている。正弦波関数は周期関数(periodic function)である。同じ波形が1秒間に周期 T (s)ごとに繰り返される回数を周波数 f (Hz, または1/s)で表し、両者の間には

$$f = \frac{1}{T}$$

の関係がある。一周期は円運動の一回転に対応するので $\omega = 2\pi f$ となる。

5. 複素数 (complex number) と複素平面 (complex plane)

複素数は実部 (real part) と虚部 (imaginary part) から構成される単一の数であり、

$$Z = x + iy$$

と書かれる。ここで x が実部、 y が虚部、 i は虚数単位 (imaginary unit, $i^2 = -1$)、 x, y 自体は実数である。複素数という名前は、実数の単位1と虚数の単位 i の2つ(複数)の単位を有することによる(素数の素とは意味が異なる)。複素数は自然数、整数、分数、有理数、無理数、実数、虚数のすべての数の種類を包含している。複素数は一つの数の中に2つの要素を含んでいて、加減乗除の演算で閉じた体系である。工学において、2つの別々の要素・性質 (entities) をまとめて一つの数として扱う必要がしばしば発生する。例えば電気電子工学関係におい

てインピーダンス (impedance) やアドミッタンス (admittance) が複素数として扱われ、抵抗を実数で、キャパシタンス (capacitance) やインダクタンス (inductance) の性質であるリアクタンス (reactance) を虚数で表す。これらは直列接続、並列接続した場合に、一定の規則に従って全体としての合成インピーダンスが計算される。計算の途中では実数部と虚数部のクロスタームや虚数部同士の積が発生するが、 $i^2 = -1$ の置き換えをすることで、最終的に得られる実数部と虚数部はそれぞれ等価的な抵抗とリアクタンスを表す。

複素数は横軸を実数軸、縦軸を虚数軸とする二次元直交平面上に表すことができる。これを複素平面またはガウス平面 (Gaussian plane) と呼んでいる。直交カルテシアン座標系の x 座標と y 座標の順序付きの組 (x, y) 、平面極座標系の中心からの長さ基準線からの角度の順序付きの組 (r, θ) は表現は異なるが共に二次元平面上の点の位置を表す。複素平面はこれらと類似した面もあるが、平面上の一点が一つの数としての複素数を表すという側面が大きく異なる。

6. 複素数の四則演算

2つの複素数を

$$Z_1 = x_1 + iy_1$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2$$

とすると、加減算は次のように

$$Z_1 \pm Z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

実数部、虚数部それぞれ独立に計算すればよい。これは虚数軸を直交カルテシアン座標系の y 軸とみなせば二次元のベクトルの加減算に相当し、複素数をベクトルとみなして複素数ベクトルの加減算と呼ばれる場合がある。乗算に関しては、 i も変数とみなして分配法則を適用し、 i^2 を-1で置き換えればよい。

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

除算に関しては、分母の有理化を行えばよい。

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \\ &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 - i^2 y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

逆数は分子を 1 として分母の有理化のみを行えばよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{x_1 + iy_1} \\ &= \frac{x_1 - iy_1}{(x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1)} \\ &= \frac{x_1 - iy_1}{x_1^2 - i^2 y_1^2} \\ &= \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\end{aligned}$$

7. 複素数の極座標表示と乗除算

複素数は実数部と虚数部で表すと 2 つの別々の要素・性質が明示的に扱える。計算上では加減算はベクトルの演算として解釈できる。複素数をその絶対値と実数軸からの角度として極形式 (polar form) で表示すると、乗除算の回転としての意味を明示的に表せる。これは正弦波関数の複素数表現にも応用される。

複素数の大きさを $|Z|$ (絶対値 (absolute value) とも言う)、実数軸からの角度を $\angle Z$ (偏角 (argument) とも言う) とすると、複素数の極座標表示は

$$Z = |Z| \angle Z$$

となる。 $|Z|$ を r , $\angle Z$ を $\angle \theta$ として

$$Z = r \angle \theta$$

とも表記する。ここでは後者の表記を用いる。

実数部と虚数部の表記との関係は

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

となる。加減算はこの表記に変換してから行う。2 つの複素数を

$$Z_1 = r_1 \angle \theta_1$$

$$Z_2 = r_2 \angle \theta_2$$

とすると、乗除算は次の様に定義される。

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

すなわち絶対値は乗除、角度は加減となる。角度の加減は複素ベクトルの回転を意味する。そこで、大きさが 1、角度が θ の複素数、すなわち複素平面上で原点を中心とする単位円上の複素数

$$1 \angle \theta = \cos \theta + i \sin \theta$$

を、他の複素数に乘じると、相手の複素数を反時計方向に θ 回転させる。大ききの 1 を省略して、

$$\angle \theta$$

と表記すれば、回転演算子としての働きが明示的に表される。

8. ネイピア数 (Napier's number) とオイラーの公式 (Euler's formula)

a ($a > 0$) を底 (base)、変数を x とする指数関数 (exponential function) は次式で与えられる。

$$f(x) = a^x$$

指数関数の $x = 0$ における傾きが 1 となる a をネイピア数と呼び e で表す。 e を底とする指数関数は、微分しても関数の形が変わらない、すなわち

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

という、大変重要な特徴を有しており、微分方程式の解として用いられることが多い。 $f(x) = e^x$ を $x = 0$ でテイラー級数展開すると

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

となる。 $x = 1$ と置く事で

$$e = 2.71828 \dots$$

と求まる。 $x = i\theta$ と置くと ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i \dots$ を適用して)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iq)^n}{n!} &= 1 + iq + \frac{1}{2!}(iq)^2 + \frac{1}{3!}(iq)^3 + \frac{1}{4!}(iq)^4 + \frac{1}{5!}(iq)^5 + \frac{1}{6!}(iq)^6 + \dots \\ &= 1 + iq - \frac{1}{2!}q^2 - \frac{1}{3!}iq^3 + \frac{1}{4!}q^4 + \frac{1}{5!}iq^5 - \frac{1}{6!}q^6 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}q^2 + \frac{1}{4!}q^4 - \frac{1}{6!}q^6 + \dots\right) \\ &\quad + i\left(q - \frac{1}{3!}q^3 + \frac{1}{5!}q^5 - \frac{1}{7!}q^7 + \dots\right)\end{aligned}$$

ここで $\cos \theta$, $\sin \theta$ の $\theta = 0$ のテイラー級数展開

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots$$

を用いると

$$e^{iq} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が導かれる。これをオイラーの公式と呼ぶ。複素数

$$Z = \cos \theta + i \sin \theta$$

は複素平面上で原点を中心とする単位円上で角度が θ の点であるから、 $e^{i\theta}$ は複素平面上で原点を中心とする単位

円上で角度が θ の点を表す。 $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$,

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \text{ である。}$$

$$1 \angle \theta = \cos \theta + i \sin \theta$$

であるから、 $e^{i\theta}$ を他の複素数に乘じると、相手の複素数を反時計方向に θ 回転させることを意味する。そこで $\times e^{iq}$

を複素数を θ 反時計方向に回転させる演算子とする一つ

の解釈が成立する。 i , -1 , $-i$ を乗じる事は $\times e^{\frac{i p}{2}}$, $\times e^{ip}$, $\times e^{\frac{i 3p}{2}}$ となり、反時計方向にそれぞれ $\frac{p}{2}$, p , $\frac{3p}{2}$ 回転させることを意味する。

また複素数の極座標表示 $Z = r \angle \theta$ は $e^{i\theta}$ を用いることにより

$$Z = r e^{iq}$$

と表す事ができる。

9. 正弦波関数のオイラーの公式を用いた表現

正弦波関数の一般形は、3つのパラメータ（自由度）を持ち

$$y(t) = A \sin(\omega t + q)$$

と表記される。ここで A は振幅 (amplitude), ω は角周波数 (angular frequency 単位 rad/s 周波数を f とすると $\omega = 2\pi f$), θ は位相 (phase 単位 rad(radian))である。

オイラーの公式

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q$$

において、 θ を $\omega t + \theta$ で置き換える事により回転ベクトル

$$A e^{i(\omega t + q)} = A \cos(\omega t + q) + i A \sin(\omega t + q)$$

となり、正弦波関数が複素平面における複素回転ベクトル $A e^{i(\omega t + q)}$ の虚数部として

$$y(t) = I_m(A e^{i(\omega t + q)})$$

と表される。これは正弦波関数を $\sin$ で代表しているが、 $\cos$ で代表する場合には実数部 $\text{Re}(A e^{i(\omega t + \theta)})$ を用いればよい。

2つの同一（角）周波数（ ω ）を持つ正弦波関数

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + q_1)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + q_2)$$

の合成は、それぞれを

$$y_1(t) = I_m(A_1 e^{i(\omega t + q_1)})$$

$$y_2(t) = I_m(A_2 e^{i(\omega t + q_2)})$$

で表し、複素回転ベクトルの和

$$A_1 e^{i(\omega t + q_1)} + A_2 e^{i(\omega t + q_2)} = (A_1 e^{iq_1} + A_2 e^{iq_2}) e^{i\omega t}$$

から

$$y_1(t) + y_2(t) = I_m((A_1 e^{iq_1} + A_2 e^{iq_2}) e^{i\omega t})$$

として求められる。これは2つの複素回転ベクトルが相対的な位置関係を保ったまま同一の角周波数で回転しているため、大きさと位相を取り出してベクトル合成すればよい事を表している。複素回転ベクトルの大きさと位相を表すベクトルは複素回転ベクトルで $t = 0$ と置くことにより得られる。

10. 正弦波関数の微分・積分

正弦波関数を複素回転ベクトル $A e^{i(\omega t + \theta)}$ を用いて

$$y(t) = I_m(A e^{i(\omega t + q)})$$

と表した時に $y(t)$ の t に関する微分は

$$\frac{dy(t)}{dt} = I_m\left(\frac{d(A e^{i(\omega t + q)})}{dt}\right)$$

を用いて求められる。

e を底とする指数関数 $e^{a t + b}$ の t に関する微分は

$$\frac{d(e^{a t + b})}{dt} = a e^{a t + b}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{d(A e^{i(\omega t + q)})}{dt} &= i\omega A e^{i(\omega t + q)} \\ &= \omega A e^{i(\omega t + q)} e^{\frac{i p}{2}} \\ &= \omega A e^{i(\omega t + q + \frac{p}{2})} \end{aligned}$$

から

$$\frac{dy(t)}{dt} = \omega A \sin(\omega t + q + \frac{p}{2})$$

が得られる。これは大きさが ω 倍となり、位相が $\frac{p}{2}$ 進む

ことを表している。複素回転ベクトルとして見ると $\times i$,

すなわち $\times e^{\frac{i p}{2}}$ により、 $\frac{p}{2}$ の回転が付加されることにな

る。大きさが ω 倍となることは周波数が高い程、微分結果が大きい事を意味している。

$$y(t) = I_m(A e^{i(\omega t + q)})$$

の t に関する積分は

$$\int y(t)dt = I_m \left(\int A e^{i(wt+q)} dt \right)$$

を用いて求められる。

e を底とする指数関数 $e^{at+\beta}$ の t に関する積分は

$$\int e^{(a+ib)t} dt = \left(\frac{1}{a+ib} \right) e^{(a+ib)t}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int A e^{i(wt+q)} dt &= \left(\frac{1}{iw} \right) A e^{i(wt+q)} \\ &= \left(\frac{1}{w} \right) A e^{i(wt+q)} e^{-i\frac{p}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{w} \right) A e^{i(wt+q-\frac{p}{2})} \end{aligned}$$

から

$$\int y(t)dt = \frac{1}{w} A \sin(wt+q-\frac{1}{2})$$

が得られる。これは大きさが $\frac{1}{w}$ 倍となり、位相が $\frac{p}{2}$ 遅れることを表している。複素回転ベクトルとして見ると $\times \frac{1}{i}$, すなわち $\times e^{-i\frac{p}{2}}$ により、 $\frac{p}{2}$ の回転が引かれることになる。

大きさが $\frac{1}{w}$ 倍となることは周波数が低い程、積分結果が大きい事を意味している。

11. 正弦波定常状態

電気電子工学では、電圧 $v(t)$ と電流 $i(t)$ が同一の (角) 周波数 (ω) の正弦波関数で

$$v(t) = V \sin(\omega t + q_V)$$

$$i(t) = I \sin(\omega t + q_I)$$

と表される場合を正弦波定常状態と呼んでいる。ここで両者を複素回転ベクトルを用いて

$$V = V e^{i(\omega t + q_V)}$$

$$I = I e^{i(\omega t + q_I)}$$

で書くと、両者は同一の角周波数 ω ($\omega > 0$) で反時計方向に回転しており、両者の相対的な位置関係は一定に保たれる。ここで V, I はそれぞれ電圧回転ベクトル、電流回転ベクトルの大きさを表す。この位置関係は (角) 周波数には依存せず、複素回転ベクトル同士の大きさと、複素回転ベクトル同士の角度の 2 つのパラメータで決定され、複素インピーダンス (Z) や複素アドミタンス (Y) が次の様に定義される。

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V}{I} \\ &= \frac{V e^{i(\omega t + q_V)}}{I e^{i(\omega t + q_I)}} \\ &= \left(\frac{V}{I} \right) e^{i(q_V - q_I)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{I}{V} \\ &= \frac{I e^{i(\omega t + q_I)}}{V e^{i(\omega t + q_V)}} \\ &= \left(\frac{I}{V} \right) e^{i(q_I - q_V)} \end{aligned}$$

ここで注目すべき最大の特徴は、時間関数としての $v(t)$, $i(t)$ の間では除算はできないが、複素回転ベクトルに変換する事で、直接除算が可能になる事である。除算の結果、時間に関する ωt が消去され、大きさと位相の関係が分離された形で得られる。逆に時間関数と複素インピーダンスや複素アドミタンスを直接乗ずることはできないが、複素回転ベクトルには直接乗ずることができる。そして乗算の結果から時間関数を得る事ができる。

12. 加法定理 (addition theorem) の導出 (オイラーの公式の応用 1)

加法定理は 2 つの角の和と差の三角比をそれぞれの角の三角比の組み合わせで表す。角の和は回転と直接関係しているので、オイラーの公式を用いて導出する。

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

指数法則 (exponential law) $a^x a^y = a^{(x+y)}$

複素数の合同規則

2 つの複素数 $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$ が $Z_1 = Z_2$ を満たす

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

を用いて加法定理を導出する。

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a$$

$$e^{ib} = \cos b + i \sin b$$

とすると

$$\begin{aligned} e^{ia} \times e^{ib} &= (\cos a + i \sin a) \times (\cos b + i \sin b) \\ &= (\cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b) \\ &\quad + i(\cos a \times \sin b + \sin a \times \cos b) \end{aligned}$$

となる。

$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

で、指数法則から

$$e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$$

であるから、左辺と右辺の実数部と虚数部がそれぞれ等しいことを用いて

$$\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a+b) = \cos a \times \sin b + \sin a \times \cos b$$

が得られる。それぞれの式において β を $-\beta$ で置き換える事により

$$\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a-b) = \cos a \times \sin b - \sin a \times \cos b$$

となり、加法定理の4つの式が得られる。

13. 原点の周りの点の回転（オイラーの公式の応用2）

二次元空間の点 (x, y) を原点の周りに反時計方向に θ 回転させる変換を考える。回転させる点を複素平面上の複素ベクトル

$$z = x + iy$$

で表す。これに $e^{i\theta}$ を乗じて複素ベクトルとして反時計方向に θ 回転させた結果を

$$Z = X + iY$$

とする。

$$Z = X + iY$$

$$= ze^{iq}$$

$$= (x + iy)(\cos q + i \sin q)$$

$$= x \cos q - y \sin q + i(x \sin q + y \cos q)$$

複素数の実数部、虚数部それぞれが等しいと置いて

$$X = x \cos q - y \sin q$$

$$Y = x \sin q + y \cos q$$

を得る。これを2行2列の回転行列で表すと

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり、アフィン変換（Affine transform）の3つの要素である、回転（rotation）、拡大縮小（scaling）、平行移動（translation）の内の、回転に関する行列表現が得られた。

14. 複素数の N 乗根（Nth root）

複素数 Z の N 乗根は、それを N 乗すると Z となる数（一般には複素数）である。 Z を複素数の極座標表示で表し

$$Z = re^{iq}$$

と置く。大きさと角度を別々に考える。大きさは N 乗して r になることから

$$\frac{1}{r^N}$$

である。角度を N 乗することは、 N 回の回転を意味し、 N 回の回転の結果が θ となればよい。

$$\frac{q}{N} + \frac{2pM}{N} \quad (M = 0, 1, \dots, N-1)$$

で表される N 個の角は、 N 倍すなわち N 回の回転により

$$q + 2pM \quad (M = 0, 1, \dots, N-1)$$

となり

$$e^{i2pM} = 1$$

であるから

$$e^{i(q+2pM)} = e^{iq} e^{i2pM}$$

$$= e^{iq}$$

となる。すなわち $Z = r e^{i\theta}$ の N 乗根として

$$Z = r^{\frac{1}{N}} e^{i \left(\frac{q+2pM}{N} \right)} \quad (M = 0, 1, \dots, N-1)$$

の N 個が求まる。例えば1の3乗根は $r=1$, $\theta=0$ と置

く事により、 $1^{\frac{1}{3}} = 1$ であるから

$$Z_0 = 1 \quad \therefore \left(\frac{0+2p \cdot 0}{3} = 0 \right)$$

$$Z_1 = e^{i \frac{2p}{3}} \quad \therefore \left(\frac{0+2p}{3} = \frac{2p}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2 = e^{i \frac{4p}{3}} \quad \therefore \left(\frac{0+4p}{3} = \frac{4p}{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となり、-1の3乗根は $r=1$, $\theta=\pi$ と置く事により、

$1^{\frac{1}{3}} = 1$ であるから

$$Z_0 = e^{i \frac{p}{3}} \quad \therefore \left(\frac{p+2p \cdot 0}{3} = \frac{p}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_1 = e^{i \frac{3p}{3}} \quad \therefore \left(\frac{p+2p}{3} = \frac{3p}{3} \right)$$

$$= -1$$

$$Z_2 = e^{i \frac{5p}{3}} \quad \therefore \left(\frac{p+4p}{3} = \frac{5p}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

15. 複素数の逆数による直線の円への写像

回転の興味深い例として、複素平面の直線上を点が動く時、複素数の逆数による写像結果は、複素平面の円上

を動く，すなわち直線運動が円運動に写像されることを示す。

複素数平面で実数軸上の点 $(a+i0)$ と虚数軸上の点 $(0+ib)$ を通る直線を考える。この直線上の任意の点 (x, iy) の x と y の間には

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

の関係が成り立つ。これは直交カルテシアン座標系での x 切片が a ， y 切片が b の直線の式である。

$$z = x + iy$$

の逆数を

$$Z = X + iY$$

とおく。

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{1}{x + iy} \\ &= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

ここで $K = x^2 + y^2$ と置けば

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{K} \\ Y &= -\frac{y}{K} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \left(X - \frac{1}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{x}{K} - \frac{1}{2a}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x}{K}\right)^2 - \frac{x}{aK} + \frac{1}{(2a)^2} \\ \left(Y + \frac{1}{2b}\right)^2 &= \left(-\frac{y}{K} + \frac{1}{2b}\right)^2 \\ &= \left(\frac{y}{K}\right)^2 - \frac{y}{bK} + \frac{1}{(2b)^2} \end{aligned}$$

2つの式の両辺を加えると

$$\begin{aligned} &\left(X - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2b}\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{x}{K}\right)^2 + \left(\frac{y}{K}\right)^2\right) - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\frac{1}{K} + \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2b)^2} \end{aligned}$$

となる。右辺の第1項は

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{K}\right)^2 + \left(\frac{y}{K}\right)^2 &= \frac{x^2 + y^2}{K^2} \\ &= \frac{K}{K^2} \\ &= \frac{1}{K} \end{aligned}$$

となる。右辺の第2項は

$$-\frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{K} = -\frac{1}{K} \quad \because \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

となる。右辺の第1項+右辺の第2項=0となり，右辺では

$$\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2b)^2}$$

だけが残る。ここで

$$r = \sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2b)^2}}$$

とおけば，

$$\left(X - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2b}\right)^2 = r^2$$

となる。これは $\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b}\right)$ を中心とする半径 r の円の方程式である。無限の直線が有限な円に写像されるという事実は興味深い。直線上で原点から無限の距離に点が移動

(2つ方向がある)すると，円上では両方とも原点に近付く。点 $(a+i0)$ は点 $\left(\frac{1}{a}+i0\right)$ に，点 $(0+ib)$ は点 $\left(0-i\frac{1}{b}\right)$ に写像され，直線上で点 $(a+i0)$ と点 $(0+ib)$ の間に在る

点は，点 $\left(\frac{1}{a}+i0\right)$ と点 $\left(0-i\frac{1}{b}\right)$ の間の円弧に写像される。

$a>0$ ， $b>0$ であれば直線上で点 $(a+i0)$ と点 $(0+ib)$ の間に在る点は第1象限にあり，対応する円弧は第4象限となる。

おわりに

本稿では「回転」の回りの話題として，数学的な記述に着目した。複素数の積を回転の側面から見ると，複素回転ベクトルが正弦波関数に対応する。集大成としてオイラーの公式を扱った。参考文献1の著者の指摘の様に「 $e^{-\pi} = -1$ 」はネイピア数 e ，円周率 π ，虚数単位 i を，極めて純粋な形式で結び付けた，オイラーの素晴らしい発見である。参考文献1を文庫本として世に送り出した著者と出版社にも心から敬意を表したい。三角関数，オイラーの公式等は，初めは取っつきにくい面もあるだろう

うが，その面白さ，深みが分かってくると，味わいが出てくる。本稿では式は必要最少限に止めた。本稿では図解はしなかったが，図を書く事で更に理解が深まるであろう。

参考文献

- 1) オイラーの贈り物 人類の至宝 $e^{i\pi} = -1$ を学ぶ 吉田 武 ちくま学芸文庫 ISBN4-480-08675-7 C0141
- 2) 直観でわかる数学 畑洋太郎 岩波書店 ISBN4-00-005679-4 C3041
- 3) 科学技術英語音声 シリーズ No. 1 数・数式・記号及び図形の読み方 日本科学技術英語研究会編