

コ ラ ム

エンジニアの道草ノート

－ 直線 2つのパラメータとその範囲 －

青木 正喜*

Off the track notes of an engineer

－ Straight lines two parameters and their range －

Masayoshi AOKI*

概 要

直線は平面上での最も基本的な図形の一つである。本稿では、直線の記述を中心として、点群への直線の当てはめを含め、応用的側面について述べる。

はじめに

直線は2つのパラメータにより定義、記述される。本稿ではこれらのパラメータの値の範囲に着目する。まずは直線と関係の深い典型的な道具について述べる。直線の記述において、座標軸やパラメータの選び方によっては、特定の直線が表せない場合がある。全ての直線を記述可能な一般的な方法ならびに、これらのパラメータの値の範囲が無限の場合と有限の場合とについて述べる。最後に点群を直線で記述するいくつかの手法について述べる。

(脚注 本稿では、 x を独立変数、 y を従属変数として x に関する一次式 $y=mx+n$ で直線を記述する場合に、定数として扱われる m 、 n をパラメータと呼ぶ。変数 x と y を第三の変数 t により $x=f_x(t)$ 、 $y=f_y(t)$ の様に記述する場合の t を補助変数と呼ぶ。)

1. 直線と道具

本稿では平面上の直線について考える。直線を書くための道具としては、定規、三角定規等があり、これらの定規の辺に添って鉛筆や烏口（鳥の嘴の形からの連想、写真1参照。英語ではa drawing penと鳥は関係なく、機能面の記述）を当てることで直線が引かれる。

直線の特定方法の一つとしては、直線の方向が任意の位置に線分として書かれるか、定規を固定して指定され、直線の通るべき一点を平面上に与える事である。与えら



写真1 烏口

れた方向に三角定規の長辺を合わせ、直角を挟む辺のどちらかを定規にあてて滑らせ、与えられた点を長辺が通るようにすれば、与えられた方向と平行で与えられた点を通る直線が得られる。

もう一つの指定方法は、平面上の2点を与える事で、与えられた2点を通るように定規または三角定規を置く。定規や三角定規の辺を突き合わせると、これを辺の方向にずらしてもすき間は生じない。これは直線の即物的な性質である。製図に用いられるドラフター（製図器）では、定規が平行性を保ったまま移動できるようになっている。直線の直感的、即物的な性質としては、2点間を糸でぴんと張る事で得られる（これは3次元空間内でも成立する）。この性質を用いた、非常に完成度の高い大工道具として墨壺があり、現在も建築現場などで用いられている。（写真2参照）。

*情報工学科教授(Professor, Dept. of Computer and Information Science), e-mail address: masa@st.seikei.ac.jp



写真2 炭壺

墨壺の中には墨を含ませた糸が入っており、この糸を材料である木材やコンクリートの平面上の2点に針を用いてピンと張り、糸を少し上に引っ張り上げてから手を放すことにより、材料の上に直線が書かれる。製図では、烏口を用いて最終的な図面を書くことを墨入れと言う。

2. 式による記述 一点と傾き

式により直線を記述しようとする場合には、平面上に座標系を導入する必要がある。一般的には、直交 xy 座標系（ガウス座標系）が用いられる。ここで、座標系の原点の位置や xy 軸の方向の決め方は便宜的であり、記述すべき直線とは直接の関係はないということに注意が必要である。特定の直線が記述出来なくなる要因は、座標軸の決め方とパラメータの選び方に深く関係している。

まず一点を通り指定された傾きを有する直線を考える。

・傾き m 、 y 切片 n の直線

$$y = mx + n \quad (1)$$

m は傾き（ x 軸方向に1進んだときに y 軸方向に m 進む）、 n は y 切片（直線と y 軸との交点）。

この記述では y 軸に平行な直線は表せない。逆に

$x = ky + l$ とすると、今度は x 軸に平行な直線が表せない。

・点 (x_0, y_0) を通り傾き m の直線

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2)$$

y 切片は $n = -mx_0 + y_0$ で与えられる。

この場合も y 軸に平行な直線は表せない。

$k(y - y_0) = (x - x_0)$ では x 軸に平行な直線が表せない。

・2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線

$x_1 \neq x_2$ であれば、傾き m が $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ で与えられ、直線は

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) \quad (3)$$

で表される。 y 切片は $n = \{(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)\}(-x_1) + y_1$ で与えられる。

$x_1 = x_2$ の場合は y 軸に平行な直線であり、直線の式は $x = x_1$ または $x = x_2$ となり、(3)式では表せない。(1)~(3)式のように座標軸の取り方によっては、特定の直線が記述できなくなる。これは正弦波波形が座標軸の取り方によって $\sin$ になったり $\cos$ になったりする現象と、類似している。座標軸の取り方は便宜的であり、直線や正弦波波形の本質とは無関係である。ただし、直線や正弦波波形の相対的な関係においては、重要な役割を担う。

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1) \quad (4)$$

と書くと、 $x_1 = x_2$ の場合にも適用でき、全ての直線が記述できる。

直線がどちらかの座標軸に平行の場合には、(1)~(3)式の記述を用いる場合に注意が必要である。

パラメータとしての傾き m 、 y 切片 n の値の範囲は、 $-\infty < m < +\infty$ 、 $-\infty < n < +\infty$ と共に無限である。

3. パラメータ範囲の有限化

傾きの代りに直線の向き、たとえば x 軸と直線の成す角度 θ を用いれば、 $0 < \theta < 2\pi$ と値の範囲が有限になる。 x, y 切片を用いた、

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

式(5)は、2点 $(a, 0), (0, b)$ を通る直線を表す。 a, b はそれぞれ x 切片と y 切片である。この表記法は x, y に関して対称となっており、楕円の表記法

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 = 1 \quad (6)$$

と式の形が類似している。

(5)式の表記では、 x 軸に平行な直線、 y 軸に平行な直線はそれぞれ $a \rightarrow \infty (y = b)$ 、 $b \rightarrow \infty (x = a)$ となり明示的には表せない。またパラメータの範囲は無限である。ここで原点から直線までの距離 ρ 、原点から直線に下ろした垂線が x 軸と成す角度 θ を用いたHough変換を適用する。

$$\begin{aligned} \rho &= a \cos \theta \\ \rho &= b \sin \theta \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式を代入すると(5)式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho \quad (8)$$

と変形される。ここで既に述べたように θ の範囲は有限($0 < \theta < 2\pi$)である。 ρ は原点から直線へ下ろした垂線の足の長さであるから、原理的には無限大までの値を取り

うる。しかし実際的な問題としては、例えば目の前にある紙やディスプレイの有限な平面内での直線を対象とすることがほとんどである。この条件の下では、対象とする直線は考えている有限の平面内のどこかを必ず通る。そこで ρ の最大値としては、扱っている有限な平面内で考えられる最長の距離まででよい。対象としている平面が長方形であれば、長方形の対角線の長さが最大値である。無限の範囲を有限化することは、複素数空間における直線上の点が逆数により有限の円周上の点に写像されることを連想させる。

4. 補助変数表示とベクトル表示

運動の軌跡等の記述では変数 x と y を第三の補助変数 t により $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$ の様に記述する場合がある。補助変数としては時間が用いられることが多い。例えば xy 平面内の放物運動は

$$\begin{aligned} f_x(t) &= x_0 + v_x t \\ f_y(t) &= y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (9)$$

で表される。 $f_x(t)$, $f_y(t)$ を正弦波関数とした場合にはリサージュ図形 (Lissajous figure) が得られ、

$$\begin{aligned} f_x(t) &= \cos t \\ f_y(t) &= \sin t \end{aligned} \quad (10)$$

の場合には、単位円となる。 $f_x(t)$, $f_y(t)$ を t の一次関数

$$\begin{aligned} f_x(t) &= x_0 + v_x t \\ f_y(t) &= y_0 + v_y t \end{aligned} \quad (11)$$

とすると、点 $P_0(x_0, y_0)$ を通り、 $V(v_x, v_y)$ の方向を持つ直線を表す。この P_0 と V はそれぞれ位置ベクトルと方向ベクトルとなっている。この記法を2点 P_1 と P_2 を通る直線に適用すると

$$L = P_1 + t(P_2 - P_1) \quad (12)$$

の形のベクトル表示が得られる。ここで $t < 0$ は直線上の P_1 側の点、 $t=0$ は点 P_1 、 $0 < t < 1$ は直線上の P_1 と P_2 の間の点、 $t=1$ は点 P_2 、 $1 < t$ は直線上の P_2 側の点に対応している。ベクトル表示は座標軸の取り方に依存せず全ての直線を表すことが出来る。さらにベクトル表示の利点は多次元空間内の直線の記述にそのまま拡張できることである。

二次元平面上において、2点 P_1 と P_2 を通る直線と、2点 Q_1 と Q_2 を通る直線の交点は、それぞれの直線上の点を以下のように Lp , Lq としたとき、

$$\begin{aligned} Lp &= P_1 + t(P_2 - P_1) \\ Lq &= Q_1 + k(Q_2 - Q_1) \end{aligned} \quad (13)$$

Lp と Lq を等しいと置くことにより

$$P_1 + t(P_2 - P_1) = Q_1 + k(Q_2 - Q_1) \quad (14)$$

として t , k を未知数とする連立一次方程式の解として得られる。ここで $0 < t < 1$, $0 < k < 1$ であれば“線分” P_1P_2 と“線分” Q_1Q_2 が交点を持つ。たとえばコンピュータグラフィックスにおいて、ウィンドウを構成する辺と描画すべき直線との交点を求める場合に 응용できる。

5. 陰関数で表した直線と点の距離

x と y に関する1次式

$$f(x, y) = ax + by + c \quad (15)$$

を用いて

$$f(x, y) = 0 \quad (16)$$

と置くことにより、直線の陰関数表示が得られる。この表現は座標軸の取り方に関係なく全ての直線を記述できる。また(16)式の直線は、2次元空間を

$$f(x, y) < 0, f(x, y) > 0 \quad (17)$$

の2つの部分空間に分割する。

式(15)には a , b , c の3つのパラメータがあるが、直線はこれを0と置いた式(16)で与えられ、 $c \neq 0$ と仮定し式(16)の両辺を c で割れば、直線を定めるパラメータは a/c と b/c の2つになる。

ここで点 (x_0, y_0) と式(16)で表される直線との距離を求める。2直線を

$$y = mx + k, y = nx + l \quad (18)$$

とすれば、2直線が直交する条件は

$$mn = -1 \quad (19)$$

で与えられる。

$a \neq 0$, $b \neq 0$ と仮定し、点 (x_0, y_0) を通り、直線 $f(x, y) = 0$ と直交する直線を考える。式(16)を

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad (20)$$

と書き直すと、点 (x_0, y_0) を通り、直線 $f(x, y) = 0$ と直交する直線は

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad (21)$$

と書ける。式(20)と式(21)から交点の x 座標が

$$x = \frac{b^2 x_0 - ac - aby_0}{a^2 + b^2} \quad (22)$$

と求まる。これにより

$$x - x_0 = -a \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \quad (23)$$

$$y - y_0 = -b \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

が得られ、交点と点 (x_0, y_0) の距離は

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (24)$$

となる。

$a \neq 0, b \neq 0$ の仮定は(20)式で傾きを用いたために必要となった。 a, b 共には0ではないとして、 $a=0, b=0$ のそれぞれの場合について個別に距離を求めた結果は、(24)式でそれぞれ $a=0, b=0$ としたものとなる。(24)式を求めるときに計算の都合上 $a \neq 0, b \neq 0$ の条件を課したが、その結果は $a=0, b=0$ の場合を包含している。これは陰関数表示が座標軸の取り方と表記法とは無関係に、全ての直線を表わせることと対応する。

6. 点群への直線当てはめ

2次元平面上の N 個の点群

$$(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, N \quad (25)$$

が与えられたときに、これらの点群に直線を当てはめることにより、点群の性質を表す指標の一つを得ることを考える。ここで点群の順序 i は考慮しないこととする。

・ x と y の間に関数関係があると仮定し、実験式(empirical formula)を求めることがよく行われる。ここでは、一次の関係として直線の式

$$y = ax + b \quad (26)$$

を仮定する。式(26)の右辺に x_i を代入した値は、 x_i に対応する直線の y の値であり、実際の点の y の値は y_i であるから、点 (x_i, y_i) に関する y の値の近似誤差は

$$e_i = y_i - (ax_i + b) \quad (27)$$

で与えられる。点群全体について、それぞれの点に関する誤差の二乗和

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^N e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \{y_i - (ax_i + b)\}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

の最小化を行う。このために E を a と b で偏微分し、それぞれ0と置くことにより、 a, b の2つを未知数とする一次連立方程式

$$a \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (29)$$

$$a \sum_{i=1}^N x_i + bN = \sum_{i=1}^N y_i \quad (30)$$

が得られる。式(29)、式(30)を解くことにより、 a, b が次式で求まる。

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i y_i\right)N - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)N - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \quad (31)$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^N y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)\left(\sum_{i=1}^N x_i y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^N x_i^2\right)N - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2} \quad (32)$$

・点群のモーメントを最小とするやり方もある。ここでは各点が単位の重さを持ち、点群の重心が原点にある

$$\sum_{i=1}^N x_i = 0, \sum_{i=1}^N y_i = 0 \quad (33)$$

と仮定し、座標軸を回転させてモーメントが最大(最小)となる軸を、点群を代表する軸とする。

座標軸を θ 時計方向に回転させると

$$\begin{aligned} X_i &= x_i \cos \theta + y_i \sin \theta \\ Y_i &= -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta \end{aligned} \quad (34)$$

が得られ、 X 軸まわりの回転モーメントは

$$\begin{aligned} M_X &= \sum_{i=1}^N X_i^2 \\ &= \frac{\cos 2\theta}{2A} + (\sin 2\theta)B + \frac{C}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} A &= \left(\sum_{i=1}^N y_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i^2\right) \\ B &= \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ C &= \sum_{i=1}^N x_i^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 \end{aligned}$$

であり、 C は θ にはよらない。式(35)を θ で微分して0と

置くことにより

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{A} \quad (36)$$

を満たす θ として、モーメントが最大（最小）となる軸 θ が得られる。

誤差の二乗和最小、モーメントが最大（最小）の直線は両方とも点群の重心を通り、点群全体を一つの直線で表す。

・複数個の直線の検出にはHough変換を用いる手法がある。各点の周りに直線を一回転させると、 ρ θ 空間上で一本の正弦波関数が対応する。同一直線上に属す点に対応する正弦波関数群は、直線の持つ特定のパラメータ ρ θ で交差するため、 ρ θ 空間上で交差する点を検出する。直線を表すパラメータ ρ θ は、前述したように、 ρ は考えている2次元平面の対角線の長さ、 θ は $0 < \theta < 2\pi$ と共に有限である。そこでパラメータ空間の ρ θ を有限個に分割し、小さい投票領域の配列とする。各点に対応する正弦波関数を描く代りに、正弦波関数が投票領域を通過する時に1票の投票を行う。投票数の多い投票領域に対応するパラメータ ρ θ が複数個の直線を与える。

2次元平面上の N 個の点群の線形関係の指標として相関係数がある。式(25)の点群に対して、相関係数 R は

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (37)$$

により定義される。相関係数 R は x_i と y_i の間に $y_i = ax_i + b$ の関係が成立するとき +1 または -1 となり、完全な相関関係があることを示す。無相関の場合には R は 0 となる。

点群が直線に属する場合は $y_i = ax_i + b$ とすれば

$$\text{式(37)の分子} = a \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{式(37)の分母} = |a| \sum (x_i - \bar{x})^2$$

から

$$R = \frac{a}{|a|} \quad (38)$$

となり、 a の値に係わらず、点群が直線上にあれば +1 または -1 である。

点群が円周上に均一に分布している場合は、 (x_0, y_0) を中心とする単位円の円周上に連続的に分布する点を仮定し、次式のように (x_i, y_i) を θ に関する連続量で置き換えると

$$x_i = x_0 + \cos \theta$$

$$y_i = y_0 + \sin \theta$$

式(37)の Σ は積分となり、

$$\begin{aligned} \text{式(37)の分子} &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、分母は二乗項であるから、

$$R = 0 \quad (39)$$

となる。

おわりに

本稿では直線を定義、記述する2つのパラメータの値の範囲に着目して考察した。このように一つ視点に着目することで、新たな側面が見えてくる。なお最後に取り上げた相関係数は、関数自体の性質の指標である自己相関・相互相関とは性質を異にするので注意が必要である。