

コ ラ ム

エンジニアの道草ノート

- 静止衛星 -

青木 正喜*

Off the track note of an engineer

- Geostationary satellite -

Masayoshi AOKI*

概要

TVでお世話になっている静止衛星の軌道の一次近似が、数個の式と日常的な数値から簡単に計算出来ることを中心にして、いくつかの話題にふれる。

アンテナの林

薨(いらか)の波ならぬ、TV受信用のアンテナの林は、VHF、UHF、SHF用の3種類から構成されている^(注1)。VHF用のアンテナは、2011年7月24日地上アナログTV放送終了をもって御役御免となる。アナログTVの放送周波数を100MHzと仮定すると、波長は3mとなり、フィーダーで作った簡易型のπ型アンテナの横幅は半波長の約1.5mとなる。アナログ方式のTVには先人の創意・工夫が綺羅星のごとく埋め込まれている^(注2)。例えば輝度信号と搬送色信号のインターリーブは、デジタル技術としては直接使われる事はないかもしれないが、素晴らしい発想である。映像信号に用いられている、AMの一方式であるVSBなども忘れ去られる運命にあるのかもしれない^(注3)。しかし時代がデジタルになっても、実際の信号伝送はアナログ技術に依存する面があることを忘れてはならない。UHFは2011年7月にアナログから完全移行される地上デジタルTVにも用いられる。UHF用アンテナは、素子の大きさが小さくなり、素子数が増えてはい

(注1) VHF: Very High Frequency 超短波

周波数 30MHz~300MHz 波長 1m~10m

UHF: Ultra High Frequency 極超短波

周波数 300MHz~3GHz 波長 10cm~1m

SHF: Super High Frequency センチメートル波

周波数 3GHz~30GHz 波長 1cm~10cm

(注2) 江藤良純、梅本益雄「映像システムの基礎 - デジタル化への要素技術とその応用 -」映像情報メディア学会編 コロナ社

(注3) VSB: Vestigial Side Band 残留側波帯

*情報科学科教授(Professor, Dept. of Computer and Information Science), e-mail address: masa@st.seikei.ac.jp

るが、形状的にはVHFの延長上にある。衛星放送用のSHFアンテナは、パラボラの別名で呼ばれるお皿であり、前二者とは形状を異にする。周波数の違いが1桁の内はサイズで対応できても、2桁の違いとなると根本的に設計変更を必要とするいい例である。これは電波の性質が光に近づくことと、素子の大きさの両方に起因している。パラボラは放物面鏡を意味し、電波を反射して焦点の一点に集中させる。光を例にとると、円を用いた鏡では平行光線が一点に焦点を結ばない。これは茶筒やお茶わんでは光が一点に集まらないことで確認できる。放物面鏡の場合には平行光線(電磁波)が焦点の一点に集まる。

東京タワーとエッフェル塔

昭和33年に完成した東京タワーの高さは333m、パリの世界博覧会開催に合わせて完成したエッフェル塔(Eifel Tower)は320m、トロント(カナダ)のCN Towerは553.33mと放送塔は高さを競っている。2011年墨田区に竣工予定の地上デジタル放送用の電波塔(新東京タワー)の高さは約610mが予定されている。電波は周波数が高くなると光と同様に直進するため、電波を遠くまで伝達させるためには、電波を送出するアンテナを高い位置に設置する必要がある。電波の直進性は、屋根の上のアンテナが放送塔の方へ向けて設置されることから類推できる。東京を中心とした関東一円(北は水戸、東は銚子、南は沼津、西は甲府)をサービスエリアとするために必要な高さが、東京タワーの高さ333mの決定要因となっている。地球が完全な球体で、電波が直進すると仮定すると、高さがh[m]の塔のてっぺんからの見通し距離は図1のように、てっぺんから円に接線を引いた接点までとして

$$d = R \cos^{-1} \left(\frac{R}{R+h} \right) \quad (1)$$

(1)式で与えられる。ここでRは地球の半径、dは地球の表面に沿って測った距離すなわち弧の長さである。hとdの関係をグラフに示すと図2となる。これは、電波が直進するとの仮定に基づいた1次近似で、例えば光の場合には、実際にはこのdよりも到達距離が長くなる^(注4)。サービスエリアを広くするためには、塔を高くすればよいが、自重を支えなければならず、1000m程度までが限界であろう。これより高くするためには、気球の使用も考えられるが固定方法、送信のためのエネルギー供給等が問題である。緊急の場合は、短時間であれば気球に付けた電波の反射器やヘリコプターの使用も考えられる。

(注4) 朝日新聞 2004.8.11 科学 直言 数量感覚鍛える数学教育を 沢田 功 水平線までの距離
朝日新聞 2004.9.1 科学 直言 水平線までの距離を再考する 井上圭典 大気による屈折の影響

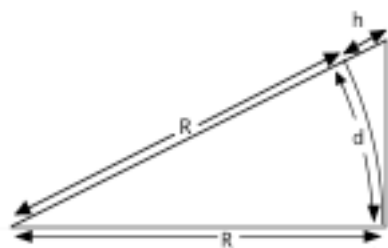


図1

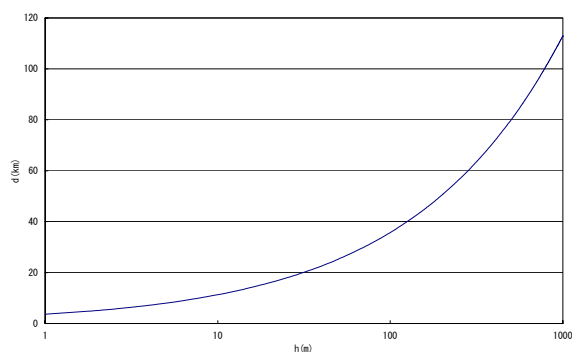


図2

地球を7回り半

電磁波(光は特定の波長範囲の電磁波である)の速度、波長、周波数の関係は次式で表される。

$$c = \lambda f \quad (2)$$

c: 光の速さ 30万(km/s)= 3×10^8 (m/s), λ : 波長 m, f: 周波数 Hz

光(電磁波)の速さである秒速30万kmは日常経験する速さに比べると非常に速いが、この速さでも問題になる場合が生じる。一つの例は電子計算機の中における信号の伝搬で、信号が3m伝搬するのに10ns(=10⁻⁸s)かかる。そこで高速化のための一つの手段が、配線をいかに短くするかである。もう一つの例は、宇宙との通信である。例えば月との通信では、片道1.3秒、往復で2.6秒かかる。音声のやり取りの場合には、間の抜けた会話になるが、そう割り切れば我慢出来ないことはない。しかし、これだけの遅れがあると、月面車を地球から遠隔操作することは不可能であり、自律走行が必須となる。

地球の子午線の長さは40000kmであり、光は1秒間に地球を7回り半する。地球は完全な球ではなく、赤道を一周する長さは子午線より長い。メートル法は当初、地球の子午線の長さの4×10⁷分の1を1メートルと定義したので、子午線の長さは、定義上4万kmと非常にきりのよい値であった。光の速度が30万(km/s)と非常にきりのよい値であることは偶然の一致である。エラトステネス(B.C.275-B.C.194)が測定した地球の周囲の長さは46250kmである。メートルの長さを定めるために、ドランブルとメシェンの二人がフランス科学アカデミーの命を受けて、パリを通る子午線の長さの測量を北側と南側に手分けして行った。この事業はフランス革命のまっただ中に行われ、測量に必要な、見通し距離確保用の高い塔の使用は、何回もスパイと間違えられた。彼らは幽閉されたり、パリへ帰ることを阻止されるなど大変な苦労があった。この測量の精度は非常に高く、誤差についての取り扱いに関する知見が得られた。後で述べる静止衛星の回転半径は約42000kmである。全く関係は無いが、タクシーの無事故表彰は年間走行距離4万km以上が条件と聞いたことがある。偶然の一致ではあるが、4万kmは何かの因縁を持つように思える。

(注5) 万物の尺度を求めて - メートル法を定めた 子午線大計測 - ケン・オールダー 吉田三知世訳 早川書房

地球は回っている

静止衛星という日本語は、あたかも宇宙空間の一点に留まっているという印象を与えかねない。英語の"geostationary satellite"は地球との相対的な位置関係が一定であるという内容に近い。われわれの周辺にある物体は、大気も含めて一緒に動いており、特に意図しない限り相対的な位置関係は変化しない。しかし、地球は北極と南極を結ぶ軸を中心として1日に1回転しており、赤

道上での周辺速度は1667[km/h] (=40000/24) と音速を越えている。回転方向は南極方向から見て右回転（時計方向）、西から東へ回っている。TVの中継で、東京の方が九州より夜明けが早い事、アメリカの例ではニューヨークでテニスの試合の中継が真夜中に行われている時ロサンゼルスでは宵の口である事等に気がつく人も多いであろう。またアメリカでは西海岸から東海岸に飛行機で移動すると、朝出発して夕方到着となり丸一日かかってしまう。ボジョレヌーボーが解禁になるのが日本が世界で一番早いのも、日付変更線と地球の回転による。人工衛星の発射場は出来るだけ南に立地されるが、これは地上における回転の初速度を利用している。この回転は1時間で15°であり、日本の明石は東経135°であり、グリニッジ（経度0°）とは9時間の時間差がある。東経45°（グリニッジと3時間の時間差）にはバグダッド、イエメンが、東経90°（グリニッジと6時間の時間差）にはダッカが位置している。

静止衛星の軌道

地球の回りを回っている衛星が地球上のどの地点との相対位置関係も一定となるためには、地球の北極と南極を結ぶ軸を中心として東廻りに1日に1回転すればよい。この回転を地球の引力で可能にするためには、この回転の軌道は赤道上でなければならない。この軌道の回転半径と回転速度は一つの値でしか成立しない。以下にこの軌道を、我々が日常知っているいくつかの値を用いて求めてみる。

まずは円運動の方程式から始める。
質量 m [kg]の物体が半径 r [m]、角速度 ω [rad/s]で回転している場合の向心力 F [N]は式(3)で与えられる。

$$F = m r \omega^2 \quad (3)$$

ここで m は衛星の質量である。地球が空間の一点にあって、地球による万有引力によって衛星がその回りを回転運動をしているとする（簡単のために質点モデルで考え、衛星の質量が地球の質量に比べて無視できるほど小さく、地球は衛星による引力の影響は受けないと仮定する）。衛星が地球から受ける万有引力は地球の質量を M [kg]とすれば式(4)で与えられる

$$F = G \frac{m M}{r^2} \quad (4)$$

ここで G [Nm²/kg²]は万有引力定数である。式(4)の F が式(3)の向心力となることから、式(5)が得られる。

$$r^3 = G \frac{M}{\omega^2} \quad (5)$$

ここで ω は24時間で一回転の条件から式(6)で与えられる。

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \times 60 \times 24} \text{ [rad/s]} \quad (6)$$

衛星の回転半径 r を求めるには式(5)において必ずしも G と M の二つの値が必要ではなく、 GM の積が求まればよい。そこで地球上での重力に着目する。地球上での重力は地球が物体を引く力であり、質点モデルを離れて、式(4)で r を地球の半径 R (=4×10⁷/2π[m])、 m を地球上の物体の質量 m_0 [kg]とすることにより、この物体に働く重力は式(7)で与えられる。

$$F = G \frac{m_0 M}{R^2} \quad (7)$$

地球上の質量 m_0 の物体に働く重力は g (=9.8[m/s²])を地球上における重力加速度とすると式(8)で与えられる。

$$F = m_0 g \quad (8)$$

これは式(7)の地球による引力であるから、式(9)として、 GM の積が求まる。

$$GM = g R^2 \quad (9)$$

式(9)の GM の積を式(5)式に代入すると式(10)が得られる。

$$r^3 = g \left(\frac{R}{\omega} \right)^2 \quad (10)$$

式(10)の g に9.8[m/s²]、 R に4×10⁷/2π[m]、 ω に2π/(60×60×24) [rad/s]を代入することにより、静止衛星の回転半径 r [m]が式(11)で与えられる。

$$r = 42.196 \times 10^6 \text{ [m]} \quad (11)$$

この回転半径がマラソンの距離42.1952kmの1,000倍であることは、偶然の一致である。静止衛星の地上からの距離（衛星直下の赤道上の点までの距離）は式(12)で与えられているように、地上約36,000kmである。

$$r - R = 35.83 \times 10^6 \quad (12)$$

このようにして、重力加速度 g (=9.8[m/s²])と子午線の長さ40000[km]から、静止衛星の軌道を求めることが出来る。このように式(3)(4)と日常的な数値から、静止軌道の一次近似が簡単に計算できる。実際の静止衛星は、いったん軌道に乗ったら、その位置で留まる（軌道を保つ）わけではなく、様々な擾乱の要因があるため、つねに位

置を修正する必要がある。

指南皿

自然の中であれ（*orienteering*）、街の中であれ（*navigation*）、移動にあたっては方位を知ることが基本である。オリエンテーションは東の方位づけが元の意味であり、北を意味することもある。方位を知る手段として磁石が一般的であるが、最近では携帯電話にGPSが組み込まれている。手元に方位を知る道具が無い場合には、曇っていなければ昼間は太陽の位置、夜間は星の位置から方位がわかる。都会では、曇っていてこれらが使えないときには、TVのアンテナから放送塔との相対的な方位を得ることができる。ここで相対的の意味は、近隣に設置されているアンテナは、放送塔への同じ方向を向いていることを意味している。大きく離れた場所に移動すると、アンテナは方位の絶対値としては別の方向（放送塔の方向）を向いてしまう。衛星放送に用いられている静止衛星は、赤道上空36000kmの高度にあって、地球との相対位置が変化しないので、地表のかなり広い範囲において同一方向に見える。そこで屋根の上のパラボラの向きから方位情報が得られる。衛星が真南にあれば、パラボラアンテナ（お皿）は、指南車ならぬ指南皿になる。指南車は歯車によるからくりによって、上部にある仙人像の手が常に南の方向を指す車として、中国において作製されたと伝えられている。東京の位置は東経140度、北緯35度で、衛星が東経140度であればお皿は真南を向くが、実際に日本が使用している衛星は諸般の事情から、東経110度である。このため、お皿は真南からは西の方を向いており、指南西皿が正しい。このことをわかっていれば、屋根の上の衛星放送受信のアンテナから方位を知ることが出来る。

月の回転半径

上で導いた式と月の公転周期から、月の回転半径が簡単に求められる。式 (5) より式 (13) の関係が導かれる。

$$r \propto \omega^{-\frac{2}{3}} \quad (13)$$

これはケプラーの法則に対応している。

静止衛星は1日で地球の周りを1回転し、月は約27日で地球の回りを公転している。そこで月の回転角速度は静止衛星の

$$\frac{1}{27} = 3^{-3} \quad (14)$$

であり月の回転半径は静止衛星の

$$(3^{-3})^{-2/3} \text{倍} = 3^2 \text{倍} = 9 \text{倍} \quad (15)$$

すなわち

$$42,000 \times 9 = 378,000 \text{km} \quad (16)$$

と計算される。

理科年表によれば月の

平均半径は384,403km

半長径は384,400kmとなっており

式 (16) の結果は、大変良い一次近似となっている。

なお、

月の半長径は地球の赤道半径の60.3倍

月の自転周期は27.32166日

質量は $7.352 \times 10^{22} \text{kg}$

重力は地球の1/6

である。

地球の質量は $5.977 \times 10^{24} \text{kg}$ である。

万有引力の大きさ

我々が物を動かし、仕事をするときの力の大きさは、大ざっぱに言ってニュートン[N]のオーダーである。物体の間に働く式 (4) の万有引力の力は非常に小さく、二つの物体を近くに置いた時に、物体間に働く万有引力の力を測定することは困難である。一般に、地球上で二つの物体が引き寄せられることはまずない。式 (4) のGは万有引力定数と呼ばれており、その大きさは

$$G = 6.67259 \times 10^{-11} [\text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}]$$

$$([\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}], [\text{N kgms}^{-2}])$$

であり、1kgの物体を距離1m離して置いたときの万有引力は

$$F = 6.670 \times 10^{-11} [\text{N}]$$

と非常に小さい。地球上で100gの物体に働く重力が0.98[N]と約1[N]であり、その約 10^{10} 分の1である。キャベンディッシュは、棒の両端に球状物体を対称的に付けたアレイを2つ用いてこの力を測定した（これにより万有引力定数が求められた）。一方のアレイを固定し、もう一方のアレイの中心をワイヤで上から吊し、2つのアレイの間に働く力を、ワイヤのねじれとして測定した。このように小さな万有引力の測定には、他からの影響を受けないように細心の注意を払う必要がある。ワイヤのねじれを、ワイヤに付けた鏡に光を当て、その反射の方向の変化を検出する原理は、微小電流を検出する検流計でも用いられる。

万有引力の力がいかに小さいかの端的な例として、小惑星の探査機「はやぶさ」と「イトカワ」の関係がある。手塚治虫がアトムを誕生させた2003年に内之浦から打ち上げられた小惑星探査機「はやぶさ」は、惑星の表面資料採取がミッションの一つであった。対象の惑星は「イトカワ」と命名され、2006年に着陸、表面資料採取が試みられた。「イトカワ」の大きさは $535 \times 294 \times 209$ m、質量は 3.5×10^{10} kgである。アポロの月着陸船の場合には、月の近くまで行けば、あとは月の重力により引き寄せられた。しかし、「イトカワ」による重力の力は大変小さく、太陽の光の圧力のほうが2桁くらい大きく、重力で落ちていくことは期待できなく、着陸までの制御は非常に難しかった様である。^(注6)

これに比べると、電荷の間に働くクーロン力は大きく、少量の電荷でも箔検電器の箔を反発させる。電流と磁界の間に働く力はさらに大きく、電気機械としてモーターを回したり、物体を動かしたりと多くの仕事に便利に用いられている。通常の物体間に働く万有引力は電気の力に比べると非常に小さく仕事をさせるには向かないように思えるかもしれないが、地球上で物体に働く重力は地球と物体の間に働く万有引力でありニュートン[N]のオーダーと仕事をさせるのに十分な大きさを有している。これは地球の質量が非常に大きい

$$M=5.977 \times 10^{24} \text{ kg}$$

ことに起因しており、水力発電等でわかるように我々は地球の重力による仕事を利用することが出来る。

(注6) 宇宙進出と日本の未来 的川泰宣 pp. 94-119, 学士会
会報 2007-I No. 862

おわりに

本稿における静止衛星の軌道計算の特徴は、万有引力定数 G 、地球の質量 M を独立して使用せずに、 GM の積とすることにより、地球上での重力加速度 g を用いた点にある。地球の衛星に必要な第一宇宙速度、地球の引力圏脱出の第二宇宙速度等についても、簡単に求めることが可能である。本稿では触れなかったが、静止衛星の寿命についての考察をお勧めする。