成蹊大学理工学研究報告
J. Fac. Sci.Tech., Seikei Univ.
Vol.45 No.1 (2008)pp.43-48

パラ統計にしたがう超対称な量子力学模型

伊藤郁夫 *

A Supersymmetric Model of Quantum Mechanics with Parastatistical Variables

Ikuo Ito*

Abstract

A supersymmetric model of quantum mechanics with a bose-like and a fermi-like variables is constructed. Generalizing the procedure for constructing a supersymmetric oscillator model, the supercharge Q is defined by including a superpotential which is an odd function of the coordinate variable q. The Hamiltonian $\mathcal{H}$ is obtained by calculating an anticommutator of the supercharge Q and $Q^\dagger$.

Keywords: Supersymmetry, Parastatistics, Quantum Model

(Received March 24, 2008)

1 Introduction

超対称性はボーズ統計にしたがう自由度とフェルミ統計にしたがう自由度との間の対称性である。もともとは，素粒子の多様なボゾンとフェルミオンの間の対称性として考えられた [1],[2],[3] が，近年では超対称な場の理論が素粒子の標準模型を超える模型の有力な候補として検討されている [4]。

量子力学の模型で超対称性を調べることは，とくにその破れの機構を理解するのに役に立つ。最初にそのような研究を行ったのは E.Witten である [5]。通常の座標と運動量を（ボーズ変数）とグラスマン代数にしたがうフェルミ変数を含む超対称な模型において，超ポテンシャルがどのような性質をもつものであれば，系の超対称性が保たれるか，あるいは (自発的に) 破れるかを議論した。

超対称な量子力学模型はボーズ的変数とフェルミ的変数の場合にも構成できる。通常のボーズ変数は

$$[b, b^\dagger] = 1 \tag{1}$$

(以下ではすべて $\hbar = m = 1$ の単位系をとる) という交換関係にしたがうが，これに対し，三項間代数

$$[b, \{b^\dagger, b\}] = 2b \tag{2}$$

だけを仮定して量子論を構成することができる [6],[7]。このような自由度をボーズ的変数という。

また，フェルミオン変数は通常の反交換関係

$$\{f^\dagger, f\} = 1 \tag{3}$$

にしたがうが，三項間の代数

$$[f, [f^\dagger, f]] = 2f \tag{4}$$

だけを仮定してやはり量子論を構成することができる。このような自由度をフェルミ的変数という。フェルミ的変数あるいはボーズ的変数にしたがう複数の自由度を考えたとき，それらのしたがう統計を通常のボーズ統計，フェルミ統計と区別してパラ統計という [6],[7]。以下ではボーズ的変数，フェルミ的変数のことをまとめてパラ変数とよぶ。

パラ変数を含み超対称不変な量子力学の模型は，最初 Rubakov と Spiridonov によって構成された [8]。それはボーズ変数とパラ変数であるフェルミ的変数を含んだもので，そのスペクトルや破れのパターンが詳しく調べられた [9],[10],[11]。

しかし，これらの模型ではボーズの自由度がパラ変数ではないために，厳密な意味での超対称性になっていない。これに対して，ボーズ，フェルミがいずれもパラ変数である超対称な模型は RIKKYO グループによって調べられた [12]。ただし，もっとも簡単な振動子模型に限られており，スペクトルの対称性はある意味で自明である。また超対称性の破れの機構についてはわからない。[1]

このノートでは，ボーズ的変数とフェルミ的変数を含み，一般のポテンシャルを持つ超対称量子力学模型を構成する。このための方針は次の通りである。まず，第 2 章でボーズ的変数とフェルミ的変数間の三項間代数関係を，Ohunuki-Kamefuchi[7] にしたがって導入する。これらの関係をもと

*成蹊大学理工学部共通基礎教授 (ito@st.seikei.ac.jp)

[1] これらの模型の review は [13] にまとめられている。

にして，第 3 章以降で超電荷 Q および系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を，次の条件を満たすように構成する：

1) べき零性

$$Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0 \tag{5}$$

2) ハミルトニアン

$$\{Q, Q^\dagger\} = \mathcal{H} \tag{6}$$

3) 超対称不変性

$$[Q, \mathcal{H}] = 0 \tag{7}$$

(7) は Q と $\mathcal{H}$ が (5) と (6) を満たすように構成されていれば，自動的に満たされる。1)-3) を $Q, Q^\dagger$ および $\mathcal{H}$ がつくる超対称代数という。第 3 章では超対称振動子模型 [12] を構成する。超電荷と b, f との代数は，三項間代数から自然に導かれることがわかる。そのあと，一般のポテンシャルの場合への拡張を試みる。第 4 章では，そのための準備として，ボーズ的変数 $b, b^\dagger$ を通常のボーズ変数の場合と同様，座標 q と運動量 p の一次結合と考え，振動子模型を q, p およびフェルミ的変数 f で書き直す。続く第 5 章で，超ポテンシャル $W(q)$ を導入し，超電荷のべき零性から $W(q)$ に対する制限を調べる。超対称代数が満たされるために超ポテンシャルは q の奇関数でなければならないことがわかる。第 6 章では，超電荷をもとにハミルトニアン $\mathcal{H}$ を構成する。

2　三項間代数

Ohunuki-Kamefuchi[7] にしたがって，同じオーダー[2] の b と f の間の三項間代数は次の形で与えられるものとする：

$$[b, [b, f]_\eta]_{-\eta} = 0, \quad [b^\dagger, [b^\dagger, f^\dagger]_\eta]_{-\eta} = 0 \tag{8}$$

$$[b, [b, f^\dagger]_\eta]_{-\eta} = 0, \quad [b^\dagger, [b^\dagger, f]_\eta]_{-\eta} = 0 \tag{9}$$

$$[b, [b^\dagger, f]_\eta]_{-\eta} = 2f, \quad [b^\dagger, [b, f^\dagger]_\eta]_{-\eta} = -2f^\dagger \tag{10}$$

$$[b^\dagger, [b, f]_\eta]_{-\eta} = -2f, \quad [b, [b^\dagger, f^\dagger]_\eta]_{-\eta} = 2f^\dagger \tag{11}$$

$$[f, \{b, b^\dagger\}] = 0, \quad [f^\dagger, \{b, b^\dagger\}] = 0 \tag{12}$$

$$[f, [f, b]_\eta]_\eta = 0, \quad [f^\dagger, [f^\dagger, b^\dagger]_\eta]_\eta = 0 \tag{13}$$

$$[f, [f, b^\dagger]_\eta]_\eta = 0, \quad [f^\dagger, [f^\dagger, b]_\eta]_\eta = 0 \tag{14}$$

$$[f, [f^\dagger, b]_\eta]_\eta = 2b, \quad [f^\dagger, [f, b^\dagger]_\eta]_\eta = 2b^\dagger \tag{15}$$

$$[f, [f^\dagger, b^\dagger]_\eta]_\eta = 2b^\dagger, \quad [f^\dagger, [f, b]_\eta]_\eta = 2b \tag{16}$$

$$[b, [f^\dagger, f]\,] = 0, \quad [b^\dagger, [f^\dagger, f]\,] = 0 \tag{17}$$

ここで $\eta = +$ または $-$ で，それぞれ交換子積 ($[\,,\,]$)，反交換子積 ($\{\,,\,\}$) を表すものとする。また，各式で互いにエルミート共役の関係にあるものはペアにしてある。これらの三項間代数は，自由度 b, f を Green 成分に展開したとき，その成分同士が交換関係または反交換関係をみたすこと，およびそれが b, f の三項間代数で与えられること，という二つの要請から導かれるものである。これだけの条件からは，η の符号は一意的に決まらない。

(8)-(12) および (13)-(17) は，すべてが独立な関係というわけではない。たとえば，(10) と (11) の関係式から (12) が得られる。実際，(10) と (11) のはじめの式はそれぞれ

$$b(b^\dagger f + \eta f b^\dagger) - \eta(b^\dagger f + \eta f b^\dagger)b = 2f$$
$$b^\dagger(bf + \eta fb) - \eta(bf + \eta fb)b^\dagger = -2f$$

ここで $\eta^2 = +$ であることを使い，辺々足しあわせると

$$bb^\dagger f - fb^\dagger b + b^\dagger bf - fbb^\dagger = 0$$

これは (12) のはじめの式に一致する。同様にして，(15),(16),(17) は互いに独立ではないことを確かめることができる。

通常のボーズ変数，フェルミ変数は，以上の関係で $\eta = +$ としたものを満たす。たとえば，(10) の左辺で $[b, [b^\dagger, f]_\eta]_{-\eta}$ は，$\eta = +$ であれば，$b, b^\dagger$ と f が可換であることを使って $[b, \{b^\dagger, f\}] = [b, 2b^\dagger f] = 2f[b, b^\dagger]$ となる。通常のボーズ変数では交換関係 (1) が成り立つから，これは $2f$ になり，確かに (10) の右辺になっている。

これに対して，もし $\eta = -$ とすると，(10) の左辺は $\{b, [b^\dagger, f]\}$ である。b と f が可換であれば，これは 0 のはずだが，そうすると (10) の右辺とは一致しない。したがって，(10) の関係は通常のボーズ変数，フェルミ変数に対しては成り立たないことになる。同じようにして，(15) の左辺で $[f, [f^\dagger, b]_\eta]_\eta$ は，$\eta = +$ であれば $\{f, \{f^\dagger, b\}\} = \{f, 2f^\dagger b\} = 2b\{f, f^\dagger\}$ となり，通常のフェルミ変数の交換関係 (3) を使うと，$2b$ になって (15) の右辺に等しい。これに対して，$\eta = -$ の場合には左辺が $[f, [f^\dagger, b]\,]$ で，通常のボーズ変数，フェルミ変数では $f^\dagger$ と b が可換だから，この関係は成り立たない。

以上のことから $\eta = -$ の場合はいわば「異常な」代数関係と言える。オーダーが 2 以上の場合には，二項間の (反) 交換関係は成り立たないので，このような「異常な」三項間代数であっても矛盾はない。$\eta = -$ のときに，どのような模型が可能なのかは興味あるところであるが，このノートでは，$\eta = +$ の符号に限ることにして議論を進める。[3]

[2] パラ変数はオーダーと呼ばれる非負整数 $n = 0, 1, 2, \cdots$ によって特徴付けられる。ボーズ的変数，フェルミ的変数の個数演算子の固有値スペクトルはそれぞれ

$$n/2, n/2+1, \cdots, n/2+k, \cdots \quad \text{(ボーズ的変数)}$$
$$-n/2, -n/2+1, \cdots, n/2-1, n/2 \quad \text{(フェルミ的変数)}$$

とくに $n = 1$ は通常のボーズ変数，フェルミ変数に対応する。

[3] $\eta = -$ のときにも第 3 章の方針にしたがって超電荷を定義し，超対称な振動子模型を構成することができる。しかしそのときのハミルトニアンは $(1/2)[b, b^\dagger] + (1/2)\{f, f^\dagger\}$ となる。もし，b と f が通常のボーズ変数とフェルミ変数なら，このハミルトニアンは 0 となる。

3　超対称振動子模型

前章で設定した ($\eta = +$ のときの) 三項間代数をもとに，超対称性をもつ振動子模型を構成する。ボーズ的変数，フェルミ的変数それぞれの振動子のハミルトニアンをボーズ変数，フェルミ変数のときに倣って

$$\mathcal{H}_B \equiv \frac{1}{2}\{b^\dagger, b\}, \quad \mathcal{H}_F \equiv \frac{1}{2}[f^\dagger, f] \tag{18}$$

とする。$b, b^\dagger$ の代数 (2) から

$$[b, \mathcal{H}_B] = b, \quad [b^\dagger, \mathcal{H}_B] = -b^\dagger \tag{19}$$

よって，$\mathcal{H}_B$ の固有ベクトルに対して $b^\dagger, b$ はそれぞれ昇降演算子になっている。同様に，$f, f^\dagger$ の代数 (4) から

$$[f, \mathcal{H}_F] = f, \quad [f^\dagger, \mathcal{H}_F] = -f^\dagger \tag{20}$$

$\mathcal{H}_F$ の固有ベクトルに対して $f^\dagger, f$ はそれぞれ昇降演算子である。

これらの和をとった

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_F \tag{21}$$

がボーズ的変数とフェルミ的変数とからなる振動子模型のハミルトニアンであるが，これが実際に超対称性をもつことを示そう。

この系が超対称性を持つのであれば，超電荷 Q があって，式 (5)-(7) の超対称代数を満たす。通常のボーズ変数とフェルミ変数からなる超対称振動子模型では，超電荷は $Q = ib^\dagger f$, $Q^\dagger = -if^\dagger b$ である。二項間の交換関係を使って $Q^2 = Q^{\dagger 2} = 0$ を示すことができる。また，(6) によってハミルトニアンは (21) で与えられる。しかし，一般のオーダーでは，二項間の関係がないので，このままでは超電荷にならない。

そこで，超電荷として

$$Q = \frac{i}{2}\{b^\dagger, f\}, \quad Q^\dagger = -\frac{i}{2}\{f^\dagger, b\} \tag{22}$$

としよう。すると，三項間の代数関係 (9),(10),(14),(15) は，超電荷と $b, b^\dagger$ あるいは $f, f^\dagger$ との交換子積を表している。

(9) は

$$[b, Q^\dagger] = 0, \quad [b^\dagger, Q] = 0 \tag{23}$$

(10) は

$$[b, Q] = if, \quad [b^\dagger, Q^\dagger] = if^\dagger \tag{24}$$

(14)

$$\{f, Q\} = 0, \quad \{f^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \tag{25}$$

(15) は

$$\{f, Q^\dagger\} = -ib, \quad \{f^\dagger, Q\} = ib^\dagger \tag{26}$$

また，(12) と (17) は，振動子ハミルトニアンとの交換関係をあたえる。

$$[f, \mathcal{H}_B] = [f^\dagger, \mathcal{H}_B] = 0 \tag{27}$$

$$[b, \mathcal{H}_F] = [b^\dagger, \mathcal{H}_F] = 0 \tag{28}$$

このように三項間代数は，超対称振動子模型の $b, b^\dagger, f, f^\dagger$ と $Q, Q^\dagger, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_F$ との交換子積を決めている。

以上の関係を使って，超対称代数 1)-3) が成り立つことを示そう。

1) ベキ零性：

超電荷の二乗は

$$Q^2 = \frac{i}{2}\left(Qb^\dagger f + Qfb^\dagger\right) \tag{29}$$

右辺 (　) 内の第一項は

$$Qb^\dagger f = [Q, b^\dagger]f + b^\dagger\{Q, f\} - b^\dagger fQ$$

ここで，(23) と (25) を使えば右辺の第一項と第二項は 0 となる。よって

$$Qb^\dagger f = -b^\dagger fQ$$

(29) の右辺 (　) 内第二項も同様にして

$$\begin{aligned} Qfb^\dagger &= \{Q, f\}b^\dagger - f[Q, b^\dagger] - fb^\dagger Q \\ &= 0 \cdot b^\dagger - f \cdot 0 - fb^\dagger Q \end{aligned}$$

したがって

$$Q^2 = -\frac{i}{2}(b^\dagger f + fb^\dagger)Q = -Q^2 = 0$$

となり，べき零性が示された。

2) ハミルトニアン：

Q と $Q^\dagger$ の積をつくると

$$QQ^\dagger = -\frac{i}{2}\left(Qf^\dagger b + Qbf^\dagger\right) \tag{30}$$

右辺の (　) 内第一項は

$$Qf^\dagger b = \{Q, f^\dagger\}b - f^\dagger[Q, b] - f^\dagger bQ$$

ここで (24) と (26) を使うと

$$Qf^\dagger b = ib^\dagger b - f^\dagger(-if) - f^\dagger bQ$$

同様にして，(30) の右辺（　）内第二項は

$$\begin{aligned} Qbf^\dagger &= [Q, b]f^\dagger + b\{Q, f^\dagger\} - bf^\dagger Q \\ &= -iff^\dagger + b(ib^\dagger) - bf^\dagger Q \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} QQ^\dagger &= -\frac{i}{2}\left(i\{b^\dagger, b\} + i[f^\dagger, f] - \{f^\dagger, b\}Q\right) \\ &= \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_F - Q^\dagger Q \end{aligned}$$

となり，ハミルトニアンは $\mathcal{H} = \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_F$ となることが示された。

3) 超対称不変性：

すでに1),2) があるので (7) は自動的に成り立つが，(23)-(26) の関係を使うことで，これを直接示すことができる。まず

$$[Q,\mathcal{H}_B]=\frac{1}{2}[Q,bb^\dagger]+\frac{1}{2}[Q,b^\dagger b]$$

で，右辺の第一項は

$$\frac{1}{2}[Q,bb^\dagger]=\frac{1}{2}[Q,b]b^\dagger+\frac{1}{2}b[Q,b^\dagger]$$

(23)，(24) を使えば，これは $-(i/2)fb^\dagger$ に等しい。同様にして

$$\frac{1}{2}[Q,b^\dagger b]=\frac{1}{2}[Q,b^\dagger]b+\frac{1}{2}b^\dagger[Q,b]=-\frac{i}{2}b^\dagger f$$

したがって

$$[Q,\mathcal{H}_B]=-\frac{i}{2}\{f,b^\dagger\}=-Q \tag{31}$$

また，

$$[Q,\mathcal{H}_F]=\frac{1}{2}[Q,f^\dagger f]-\frac{1}{2}[Q,ff^\dagger]$$

で，右辺の交換子積は (25),(26) を使って

$$\frac{1}{2}[Q,f^\dagger f]=\frac{1}{2}\{Q,f^\dagger\}f-\frac{1}{2}f^\dagger\{Q,f\}=\frac{i}{2}b^\dagger f$$

$$\frac{1}{2}[Q,ff^\dagger]=\frac{1}{2}\{Q,f\}f^\dagger-\frac{1}{2}f\{Q,f^\dagger\}=-\frac{i}{2}fb^\dagger$$

したがって，

$$[Q,\mathcal{H}_F]=\frac{i}{2}\{f,b^\dagger\}=Q \tag{32}$$

(31),(32) をあわせると $[Q,\mathcal{H}]=0$ となり，(22) を超電荷とする振動子模型は超対称不変であることが示せた。

4　座標表示の三項間関係

前の章で与えた三項間代数を，変数 b を互いに共役な座標と運動量にあたる変数 q,p で置き換えたもので書き直す。

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}(b+b^\dagger),\quad ip=\frac{1}{\sqrt{2}}(b-b^\dagger) \tag{33}$$

あるいは，逆に解いた

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}(q+ip),\quad b^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(q-ip) \tag{34}$$

を，(8)-(11) に代入し，整理すると以下の関係が得られる。

$$[q,\{q,f\}]=0,\quad [q,\{q,f^\dagger\}]=0 \tag{35}$$

$$[p,\{p,f\}]=0,\quad [p,\{p,f^\dagger\}]=0 \tag{36}$$

$$[q,\{p,f\}]=2if,\quad [q,\{p,f^\dagger\}]=2if^\dagger \tag{37}$$

$$[p,\{q,f\}]=-2if,\quad [p,\{q,f^\dagger\}]=-2if^\dagger \tag{38}$$

これらのうち，(35) および (36) から

$$[f,q^2]=[f,p^2]=0,\quad [f^\dagger,q^2]=[f^\dagger,p^2]=0 \tag{39}$$

が導ける。また，(37),(38) は次の関係式と同等である。

$$[f,\{q,p\}]=[f^\dagger,\{q,p\}]=0 \tag{40}$$

$$\{f,[q,p]\}=4if+2(pfq-qfp) \tag{41}$$

$$\{f^\dagger,[q,p]\}=4if^\dagger+2(pf^\dagger q-qf^\dagger p) \tag{42}$$

さらに，(34) を (13)-(17) に代入して整理すると

$$\{f,\{f,q\}\}=0,\quad \{f^\dagger,\{f^\dagger,q\}\}=0 \tag{43}$$

$$\{f,\{f,p\}\}=0,\quad \{f^\dagger,\{f^\dagger,p\}\}=0 \tag{44}$$

$$\{f,\{f^\dagger,q\}\}=2q,\quad [q,[f^\dagger,f]]=0 \tag{45}$$

$$\{f,\{f^\dagger,p\}\}=2p\quad [p,[f^\dagger,f]]=0 \tag{46}$$

最後に，b の三項間代数 (2) を p,q で書き直せば

$$[q,p^2]=2ip,\quad [p,q^2]=-2iq \tag{47}$$

二番目の関係から，q^2 の関数 $F(q^2)$ と p との交換子積は，通常の量子論と同様，F の導関数を与えることがわかる。[4]

$$[p,F(q^2)]=-2iqF'(q^2) \tag{48}$$

5　ポテンシャル模型への拡張

この章では，前章で導いた三項間代数を使い，超対称な振動子模型をポテンシャル模型に拡張することを考える。そのために，まず振動子模型のハミルトニアン (21) を (34) を使って q,p で書き直す。すると

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\frac{1}{2}[f^\dagger,f] \tag{49}$$

同様にして超電荷 (22) も q,p で表すことができて

$$Q=\frac{i}{2\sqrt{2}}\{f,q-ip\} \tag{50}$$

ここで，ハミルトニアン (49) のうち $(1/2)q^2$ は調和振動子のポテンシャルとみなせば，この部分を適当なポテンシャルで置き換えることで一般のポテンシャル模型を構成できる。しかし，ポテンシャルをうまく選ばない限り，そのようにして得られたハミルトニアンの超対称性は必ずしも保証されない。すなわち，超電荷が存在して，(6) の関係を満たすかどうかわからない。

[4]オーダー 2 以上の場合，q を対角化する表示で運動量演算子は

$$p=-i\frac{d}{dq}+i\frac{c}{q}R$$

と書けることがわかっている。ここで，c は実定数，R は座標の符号を変える演算子で任意の関数 $G(q)$ に対して $RG(q)=G(-q)$ である。この表式が (48) の関係を満たしていることは容易に確かめることができる。

そこで，順番を変え，超電荷から出発してハミルトニアンを構成しよう。それには式 (50) で，$q-ip$ の q を超ポテンシャル $W(q)$ で置き換えた

$$Q=\frac{i}{2\sqrt{2}}\{f,W(q)-ip\} \tag{51}$$

の形に超電荷を仮定する。式 (51) の Q が超電荷であるためには，べき零性を満たしていなければならない。そのために，超ポテンシャル $W(q)$ が満たすべき条件を求めよう。そうしたあとで，(6) によってハミルトニアンを構成する。

まず超ポテンシャルを

$$W(q)\equiv u(q^2)+qv(q^2) \tag{52}$$

と書いておく。ここで，$u(q^2),v(q^2)$ はいずれも q^2 の関数で $f,f^\dagger$ と可換である。計算を見通しよくするために

$$\pi\equiv\frac{1}{2}\{f,p\},\quad \chi\equiv\frac{1}{2}\{f,q\} \tag{53}$$

とおけば

$$Q=\frac{i}{\sqrt{2}}(2u(q^2)f+v(q^2)\chi-i\pi) \tag{54}$$

と書ける。π や χ の代数は前章で導いた三項間代数 (35)-(47) から

$$\pi^2=\chi^2=\{\pi,\chi\}=0 \tag{55}$$

$$\pi^{\dagger 2}=\chi^{\dagger 2}=\{\pi^\dagger,\chi^\dagger\}=0 \tag{56}$$

$$\{\pi,\pi^\dagger\}=p^2,\quad \{\chi,\chi^\dagger\}=q^2 \tag{57}$$

$$\{\chi,\pi^\dagger\}=\{p,q\}-\frac{i}{2}[f^\dagger,f] \tag{58}$$

$$\{\pi,\chi^\dagger\}=\{p,q\}+\frac{i}{2}[f^\dagger,f] \tag{59}$$

また $u(q^2),v(q^2)$ に対しては (48) を使って

$$[\pi,u]=-2iu'\chi,\quad [\pi,v]=-2iv'\chi \tag{60}$$

$$[\pi^\dagger,u]=-2iu'\chi^\dagger,\quad [\pi^\dagger,v]=-2iv'\chi^\dagger \tag{61}$$

が成り立つことがわかる。

さらに，π,χ と f とは次の式が成り立つ。

$$\{f,\chi\}=\{f,\pi\}=0,\quad \{f^\dagger,\chi^\dagger\}=\{f^\dagger,\pi^\dagger\}=0 \tag{62}$$

$$\{f^\dagger,\pi\}=\{f,\pi^\dagger\}=p,\quad \{f^\dagger,\chi\}=\{f,\chi^\dagger\}=q, \tag{63}$$

(54) から，Q^2 は

$$Q^2=-\frac{1}{2}\Big(4u^2f^2+v^2\chi^2-\pi^2 \\ +\ 2\{uf,v\chi\}-2i\{uf,\pi\}-i\{v\chi,\pi\}\Big)$$

右辺で (55) および (62) を使うと，

$$Q^2=-\frac{1}{2}\left(4u^2f^2-2i[\pi,u]f-i[\pi,v]\chi\right)$$

ここで (60) によって $[\pi,u],[\pi,v]$ を u,v の導関数で書き直し，さらに $\chi^2=0$ であることを使うと

$$Q^2=-2u^2f^2+2u'\chi f$$

右辺の第一項と第二項はそれぞれ q についての偶奇性が異なるから，$Q^2=0$ となるには $u(q^2)\equiv 0$ でなければならない。すなわち，超ポテンシャルは $W(q)=qv(q^2)$ でなければならないことがわかった。したがって超電荷は

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\pi+iv(q^2)\chi\Big) \tag{64}$$

また，その共役は

$$Q^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\pi-iv(q^2)\chi^\dagger\Big) \tag{65}$$

のように書ける。

超電荷 Q と力学的変数 $f,f^\dagger,q,p$ との代数は (35)-(47) を使って次のようになる。

$$\{Q,f\}=\{Q^\dagger,f^\dagger\}=0 \tag{66}$$

$$\{Q,f^\dagger\}=\frac{i}{\sqrt{2}}(qv-ip),\quad \{Q^\dagger,f\}=-\frac{i}{\sqrt{2}}(qv+ip) \tag{67}$$

$$[Q,q]=-\frac{i}{\sqrt{2}}f,\quad [Q^\dagger,q]=-\frac{i}{\sqrt{2}}f^\dagger, \tag{68}$$

$$[Q,p]=-\frac{1}{\sqrt{2}}(2qv'\chi+vf),\quad [Q^\dagger,p]=\frac{1}{\sqrt{2}}(2\chi^\dagger qv'+vf^\dagger) \tag{69}$$

6　ハミルトニアン

(64),(65) で与えられた超電荷 $Q,Q^\dagger$ の反交換子積を計算してハミルトニアンを求めよう。π と χ を使った表示で

$$\mathcal{H}=\{Q,Q^\dagger\} \\ =\frac{1}{2}\Big(\{\pi,\pi^\dagger\}+v^2\{\chi,\chi^\dagger\}+\ i\{v\chi,\pi^\dagger\}-i\{\pi,v\chi^\dagger\}\Big)$$

右辺の (　　) 内第一項と第二項は式 (57) を使って

$$\{\pi,\pi^\dagger\}=p^2,\quad v^2\{\chi,\chi^\dagger\}=v^2q^2$$

第三項は

$$\{v\chi,\pi^\dagger\}=v\{\chi,\pi^\dagger\}+[\pi^\dagger,v]\chi$$

と直しておき，(58) と (61) を使うと

$$\{v\chi,\pi^\dagger\}=v\left(-\frac{i}{2}[f^\dagger,f]+\{p,q\}\right)-2iv'\chi^\dagger\chi$$

同様にして第四項は

$$\{\pi,v\chi^\dagger\}=v\left(\frac{i}{2}[f^\dagger,f]+\{p,q\}\right)-2iv'\chi\chi^\dagger$$

以上をまとめると

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\Big(p^2+v^2q^2+2v'[\chi^\dagger,\chi]+v[f^\dagger,f]\Big) \tag{70}$$

もっとも簡単なのは $v(q^2)\equiv 1$ の場合で，このとき (70) は超対称振動子模型のハミルトニアン (21) に帰着する。

ハミルトニアン (70) は，三項間代数によって導かれたが，通常のボーズ変数，フェルミ変数に対してはさらに二項間

の交換関係を仮定することで簡単になる。(70) で $[\chi^\dagger, \chi]$ は $q^2[f^\dagger, f]$ に帰着するから，このときには

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\left(p^2 + v^2 q^2 + (2q^2 v' + v)[f^\dagger, f]\right) \tag{71}$$

となり，これは Witten の解析した超対称ポテンシャル模型で $W(q) = qv(q^2)$ としたものにほかならない。しかし，一般のオーダーのときには $[\chi^\dagger, \chi]/q^2$ と $[f^\dagger, f]$ とは互いに独立な演算子である。このことは次のような考察からもわかる。

オーダー n のフェルミ的変数について $(1/2)[f^\dagger, f]$ の固有値は $-n/2, -n/2+1, \cdots, n/2-1, n/2$ のように $n+1$ 個ある。ところで

$$\left(\frac{[\chi^\dagger, \chi]}{q^2}\right)^2 = \frac{(\{\chi^\dagger, \chi\})^2 - 2\chi^\dagger\chi^2\chi^\dagger - 2\chi{\chi^\dagger}^2\chi}{(q^2)^2}$$

は (55),(57) を使うとこの右辺は 1 に等しい。したがって $[\chi^\dagger, \chi]/q^2$ という演算子の固有値は ± 1 になる。$n = 1$ のときには，$[f^\dagger, f]$ の固有値が ± 1 になって一致する。これは上で見たように二つの演算子が同じものになるからである。しかし，$n(\geq 2)$ のときには固有値のスペクトルが異なったものになり，したがって二つの演算子は互いに独立である。

このノートでは，超電荷が一個のスーパーポテンシャルで表した模型についてハミルトニアンを求めた。しかし，これがもっとも一般的な超対称ポテンシャル模型というわけではなく，複数個のスーパーポテンシャルを含む超対称模型が構成できる可能性がある。実際，ボーズ変数とオーダー 2 のフェルミ的変数からなる Rubakov と Spiridonov の超対称模型 [8] では，超電荷は二つのスーパーポテンシャルを含んでいる。パラ変数の構成は違っているもの，超電荷 (64) をさらに一般化した模型の可能性を強く示唆している。

参考文献

[1] H.Miyazawa, *Phys.Rev.***170** (1968) 1568

[2] D.V.Volkov and V.P.Akulov, *JETP Lett.* **16** (1972) 438

[3] J.Wess and B.Zumino, *Nucl.Phys.* **B70** (1974) 39

[4] *e.g.* H.P.Nilles, *Phys.Rept.* **110** (1984) 1

[5] E.Witten, *Nucl.Phys.* **B188** (1981) 513

[6] H.S.Green, *Phys.Rev.* **90** (1953) 270

[7] Y.Ohunuki and S.Kamefuchi, *Quantum Field Theory and Parastatistics*, University of Tokyo Press, (1982)

[8] V.A.Rubakov and V.P.Spridonov, *Mod.Phys.Lett.* **A3** (1988) 1337

[9] F.Ardlan and F.Mansouri, *Phys.Rev.Lett.* **56** (1986) 2456; *Phys.Lett.* **176B** (1986) 99

[10] I.Ito and T.Kon, in *Proc. of 2nd Workshop on Thermal Field Theories and Their Applications*, eds. H.Ezawa *et.al.* (North-Holland, 1991) p.521

[11] I.Ito and T.Kon, *Int.J.Mod.Phy.* **A7** (1992) 3997

[12] M.Hama, A.Koike, M.Sawamura and H.Suzuki, *Mod.Phys.Lett.* **A6** (1991) 2019

[13] I.Ito, *Bull. of Seikei University* **28** (1996) #2

[14] S.N.Biswas and A.Das, *Mod.Phys.Lett.* **A3** (1988) 549

[15] J.Beckers and N.Debergh, *Mod.Phys.Lett.* **A4** (1989) 1209; *Mod.Phys.Lett.* **A4** (1989) 2019