

二つの評価尺度を考慮した割付けに自由度がある・・・ フローショップ・スケジューリング問題の考察

小田切孝仁^{*1}, 笥 宗徳^{*2}, 渡辺一衛^{*3}

A Consideration of the Flow Shop Scheduling Problem which has Flexibility in Assignment
with Two Rate Scales

Takahito ODAGIRI^{*1}, Munenori KAKEHI^{*2}, Ichie WATANABE^{*3}

ABSTRACT: This paper is dealing with the scheduling problem which minimizes the total flow time for work in process, subject to minimize the total elapsed time. Two workers process some products with which one product for processing consists of three work processes. In this research, conditions were attached to processing time, and theoretical analysis was performed, some approximation solution methods for having applied the result were considered, and comparison evaluation was carried out.

KEYWORDS: Job Assignment, Flow Shop Scheduling, Total Elapsed Time, Total Flow Time

(Received April 6, 2004)

1. はじめに

製品のライフサイクルの短命化やグローバル化などによる企業環境の変化により、生産現場における生産方法も大きく変化している。例えば、在庫の削減、生産リードタイムの短縮、少品種多量生産から多品種少量生産への変化などへの対応は、多くの生産プロセスで避けて通れない状況になっている。そのため、少品種多量生産に向いていたライン生産をやめ、多品種少量生産へ対応するために、1人または少人数でのセル生産など様々な生産方式が採用されている。

多品種でのライン生産における生産計画についてはフローショップ型のスケジューリング手法が用いられる。しかし、多能工化した作業員や汎用機化された機械設備への対応策は、一般のフローショップ問題では考慮されていない。

本研究では、1つの製品（処理対象）の要素作業が3つからなる複数品種を、2人の作業員が処理するという最も単純なモデルを対象としたスケジューリング問題を扱っている。これまでこの種の問題では、仕事を始めてから最後の仕事が完成するまでの総所要時間が評価尺度として扱われている^{[1][2]}。本研究では総所要時間を第1の評価尺度とし、個々の製品の生産リードタイムを短縮することも考慮し、中間製品（仕掛品）での滞留時間の総和を第2の評価尺度にした点に特徴がある。

2. 問題の定式化

本研究で取り上げる問題の概要、前提条件及び性質について述べる。

本研究で扱うスケジューリング問題では、2人の作業員が3つの要素作業を処理し、そのうち2番目の要素作業は2人の作業員のいずれでも処理が可能である(図1)。この問題の前提条件を以下に列挙する。

- 1) 2人の作業員 M1, M2 によって処理される n 個の処理対象が与えられている。
- 2) 処理対象 i ($i = 1, 2, \dots, n$) は 3 つの要素作業 $\langle a_i \rangle, \langle b_i \rangle, \langle c_i \rangle$ からなり、この順で処理される。
- 3) 処理対象 i の要素作業 $\langle a_i \rangle, \langle b_i \rangle, \langle c_i \rangle$ のそれぞれの処

*1 大学院情報処理専攻博士前期課程 (Graduate Student, Master Course, Dept. of Information Science)

*2 大学院情報処理専攻博士後期課程 (Graduate Student, Doctoral Course, Dept. of Information Science)

*3 経営・情報工学科教授(watanabe@is.seikei.ac.jp)
(Professor, Dept. of Industrial Engineering and Information Science)

理時間が a_i, b_i, c_i として与えられている。

- 4) 要素作業 $\langle a_i \rangle$ は作業員 M1 によって処理される。要素作業 $\langle b_i \rangle$ は作業員 M1, もしくは M2 によって処理される。要素作業 $\langle c_i \rangle$ は作業員 M2 によって処理される。
- 5) 要素作業 $\langle b_i \rangle$ は $\langle a_i \rangle$ の処理が終了していなければ処理を開始できない。要素作業 $\langle c_i \rangle$ は $\langle b_i \rangle$ の処理が終了していなければ処理を開始できない。
- 6) 要素作業 $\langle b_i \rangle$ を作業員 M1 が処理する処理対象を I 型のジョブと呼び、要素作業 $\langle a_i \rangle$ に引き続き処理する。要素作業 $\langle b_i \rangle$ を作業員 M2 が処理する処理対象を II 型のジョブと呼び、要素作業 $\langle c_i \rangle$ を引き続き処理する。すなわち、本研究でのジョブとは、処理対象の型が決まった状態をいう。

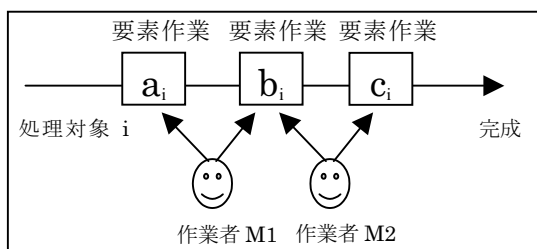


図1 モデル図

問題を解くにあたり次の記号を用いる。

- 1) i 番目に処理するジョブを j_i で表し、1つのスケジュールを $S = (j_1, j_2, \dots, j_i, \dots, j_n)$ で表す。
- 2) 作業員 M1, M2 のジョブ j_i での処理時間を $M^1_{j_i}$, $M^2_{j_i}$ で表す。
- 3) ジョブ j_i の仕掛品での滞留時間を $f(j_i)$ で表す。
- 4) スケジュール S の下での総所要時間を $T(S)$, 総滞留時間を $F(S)$ で表す。

3 問題の理論的解析

この問題の性質を証明は省略して①～④に列挙する。性質②～④は各処理対象の要素作業 $\langle a_i \rangle$, $\langle b_i \rangle$, $\langle c_i \rangle$ の作業時間がそれぞれ一定、すなわち $a_i = a$, $b_i = b$, $c_i = c$, という制約条件下での性質である。また、解析の都合上 $|a - c| < b$ という制約も加えている。

性質① j_1 が II 型のジョブ, j_n が I 型のジョブであるスケジュールの中に最適スケジュールが存在する。

この性質は、 j_1 が I 型のジョブであるが、 j_n が II 型のジョブである最適スケジュールが存在したとき、 j_1 を II 型のジョブ j_n を I 型のジョブに変更しても総所要時間

は長くなることにより証明される。

性質② j_1 が II 型のジョブ, j_n が I 型のジョブのもとで、式(1)を最小にするスケジュールは総所要時間を最小にするスケジュールである。(図2)

$$\left| \sum_{i=2}^n M^1_{j_i} - \sum_{i=1}^{n-1} M^2_{j_i} \right| \dots (1)$$

要素作業 $\langle b_i \rangle$ を作業員 M1, M2 のどちらにいくつ割り付けるかを決めるときに、式(1)を満たすような I 型および、II 型のジョブ数を決定する必要がある。

性質③ j_1 が II 型のジョブ, j_n が I 型のジョブであり、かつ II 型のジョブが u 個, I 型のジョブが $n-u$ 個のもとで、 $j_1 \sim j_u$ までは II 型, $j_{u+1} \sim j_n$ が I 型のスケジュールの中に総所要時間が最小になるスケジュールが存在する。

この性質は、Johnson^[3]により明らかである。

性質④ 性質③を満たすスケジュールにおいて、II 型のジョブ j_i ($1 \leq i \leq u$) の滞留時間が $f(j_i) \geq b$, I 型のジョブ j_k ($u+1 \leq k \leq n$) の滞留時間が $f(j_k) \geq b$, かつジョブ

$j_{i+1} \sim j_{k-1}$ の各滞留要時間, $f(j_{i+1}), \dots, f(j_{k-1}) \geq 2b$ である

ならば、ジョブ j_i を I 型のジョブに、ジョブ j_k を II 型に変更しても、総所要時間を変えずに総滞留時間を短縮することができる。

この性質は図3に示すように、仕掛品での滞留時間により短絡するときの1つの判断基準として用いることができる。

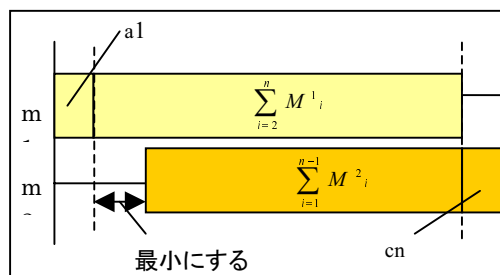


図2 作業員別のガント・チャート

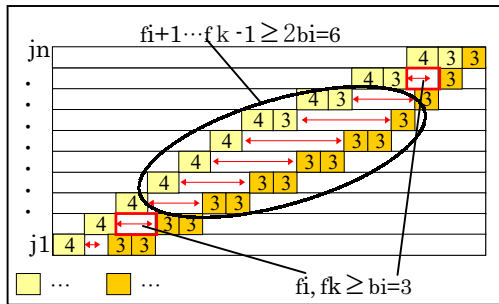


図3 割り付けの変更ができる処理対象別の
ガント・チャートの例

4. 条件付き問題

全ての処理対象が同一であるという制約条件下で問題を考える。すなわち、 $a_i=a, b_i=b, c_i=c, (i=1, 2, \dots, n)$ が成り立っている。

4. 1 近似解法の提案

各処理対象の要素作業 $\langle a_i \rangle, \langle b_i \rangle, \langle c_i \rangle$ の値は一定のため、何個の処理対象を何型のジョブにするかを決定することがここでの主たる問題である。2.2での性質①より、1番目とn番目のジョブの型はあらかじめそれぞれII型と、I型とに決定できる。

その他のジョブの割り付け方について以上の3つの近似解法を考える。

解法 i

手順1 $\dots j_1$ をII型のジョブ、 j_n をI型のジョブにする。

手順2 $\dots$ 式(1)を満たす、I型、II型のジョブ数を決定する。

手順3 $\dots$ 手順2でII型のジョブが u 個、I型のジョブが $n-u$ 個と決まった時、 $j_2 \sim j_u$ をII型、 $j_{u+1} \sim j_{n-1}$ をI型と決定する。

手順4 $\dots$ II型のジョブ j_i の滞留時間 $f(j_i) \geq b$ 、I型のジョブ $j_k (k > i)$ の滞留時間 $f(j_k) \geq b$ で、なおかつジョブ $j_{i+1} \sim j_{k-1}$ の各滞留要時間、 $f(j_{i+1}), \dots, f(j_{k-1}) \geq 2b$ であるならば、ジョブ j_i をI型のジョブに、ジョブ j_k をI型に変更することができる。

手順5 $\dots i \leq k$ である限り、 i を2から1ずつ増やしていき、 k は1ずつ減少させ、手順4ができる限り繰り返す。

解法 ii

手順1 $\dots j_1$ をII型のジョブ、 j_n をI型のジョブにする。

手順2 $\dots$ 作業員 M1 の処理対象 j_i の処理終了時刻より作業員 M2 のジョブ j_{i+1} の処理終了時刻が遅い時は処理対象 j_i をI型のジョブ、早い時はII

型のジョブと決定する。

手順3 $\dots$ 手順2を $i=2$ から $i=n-1$ まで繰り返す。

解法 iii

手順1 $\dots j_1$ をII型のジョブ、 j_n をI型のジョブにする。

手順2 $\dots$ 作業員 M2 の処理対象 j_i の処理開始時刻より作業員 M1 のジョブ j_{i+1} の処理開始時刻が遅い時はI型のジョブ、早い時はI型のジョブと決定する。

手順3 $\dots$ 手順2を $i=n-1$ から $i=2$ まで繰り返す。

4. 2 数値実験の概要

一つの問題に対して、全探索で求めた総所要時間、総滞留時間の値と、解法 I、解法 ii、解法 iii の値を比較する。このような比較を下記の条件を満たす、1～9までの整数の組み合わせから得られる204通りの問題について行った。

適用して保存されたスケジュールの評価尺度の要素作業については、以下の条件をもとに決定した。

条件1) $n = 10$

条件2) $a, b, c > 0$

条件3) $c - a < b$

4. 3 数値実験の結果

表1および表2に実験結果の一例を示す。ここで各解法でのスケジュールを S 、最適スケジュールを S^* で示す。表1では近似解法で得られた総所要時間 $T(S)$ が全探索で求めた最適な総所要時間 $T(S^*)$ からどれ程離れているかを(2)式で示した値で評価している。この値をここでは総所要時間の近似度と呼ぶことにする。表2では最適解と各解法の結果が一致した問数を比較している。総所要時間の近似度=

$$\frac{(T(S) - T(S^*))}{T(S^*)} \times 100 \quad \dots \dots \dots (2)$$

この数値実験より解法 i で得られた総所要時間は全ての問題について最適解と一致した。また総滞留時間においても、全204問中、181問は最適解と一致し、一致率は88.7%に達した。

表 1 $b_i=2$ の結果 (一例)

$b_i=2$	総所要時間近似度		
a_i, c_i	解法 i	解法 ii	解法 iii
1 2	0%	11.11%	14.81%
2 3	0%	7.89%	10.55%
3 4	0%	6.12%	8.16%
4 5	0%	5.00%	6.66%
5 6	0%	4.22%	5.63%
6 7	0%	3.65%	4.80%
7 8	0%	3.22%	4.30%
8 9	0%	2.88%	3.84%

表 2 最適解と一致した問題数の比較

	解法 i	解法 ii	解法 iii
総所要時間	204 問	15 問	8 問
総滞留時間	181 問	15 問	8 問

5. 条件の一部を一般化した問題

3 章では全ての処理対象が同一という制約条件を持っていた。本章では $b_i=b$ と変わらないが, a_i, c_i の値を一般化した問題を扱う。

5. 1 近似解法の提案

4. 1 では型の決め方が中心であったが, ここでは a_i, c_i の値が処理対象ごとに異なるため要素作業 $\langle b_i \rangle$ の割り先と, ジョブの処理順序を考慮しなければならない。

処理順序決定にあたって重要になることは 2.2 の性質④で述べた各ジョブの滞留時間の関係である。図 3 における始めと終わりの処理対象から, スケジュールの中心にある処理対象にかけて次第に滞留時間を長くすることで, 性質④で述べた型の割り付けの変更回数を増やすことができる。また性質①より 1 番目の処理対象には a_i が最小のもの, n 番目の処理対象には c_i が最小のものを順序付けすることにより, 総所要時間を短くする可能性がある。

2 番目から $n-1$ 番目までの処理対象の順序付け方法として, 性質④を満たす可能性を高める次の 2 つの方法を考えた。

まず 1 番目と n 番目以外の処理対象を, $\{a_i < c_i\}, \{a_i = c_i\}, \{a_i > c_i\}$ の 3 つのグループ x, y, z に分ける。

順序付け i: 最初に x を $c_i - a_i$ の小さい順に, y は処理対象の番号, z は $a_i - c_i$ の大きい順に並べる。

順序付け ii: 最初に x を $c_i - a_i$ の大きい順に, y は処理

対象の番号順, z は $a_i - c_i$ の小さい順に並べる。

この問題の近似解法として 3.1 で提案した 3 通りの割り付け方法と, 上記の 2 通りの順序付け方法を組み合わせ, 表 3 で示す計 6 種類の近似解法を比較することにした。

表 3 近似解法の種類

		割り付け		
		i	ii	iii
順序付け	i	解法 ①	解法 ③	解法 ⑤
	ii	解法 ②	解法 ④	解法 ⑥

5. 2 数値実験の概要

処理対象 i の要素作業 $\langle b_i \rangle$ の作業時間は同じ値, すなわち $b_i=b$ とし, $b_i=5$ とした。

また要素作業 $\langle a_i \rangle, \langle c_i \rangle$ の値については, 以下の条件を基に決定した。

条件 1 1~9 までの一様整数乱数を発生させ 80 通りの問題を作成

条件 2 2~8 までの一様整数乱数を発生させ 24 通りの問題を作成

条件 3 3~7 までの一様整数乱数を発生させ 24 通りの問題を作成

条件 4 4~6 までの一様整数乱数を発生させ 24 通りの問題を作成

以上の 152 個の問題について, 全探索で求めた総所要時間、総滞留時間の値と, 近似解法①~⑥で得られた評価尺度の値を比較した。

5. 3 数値実験結果

各近似解法の優劣の比較をするために, 実験結果の評価尺度である総所要時間の近似度を横軸に, 総滞留時間の最適値との差を縦軸とした散布図で示す。

ここでは実験結果の例として 2 つの散布図を示す。図 4 は条件 1 での実験結果, 図 5 は条件 4 での実験結果である。

図 4, 図 5 から近似解法①, ②ともこのケースにおいては最短の総所要時間になっていることがわかる。また総滞留時間においては乱数の幅が小さい程最適値に近づくことがわった。

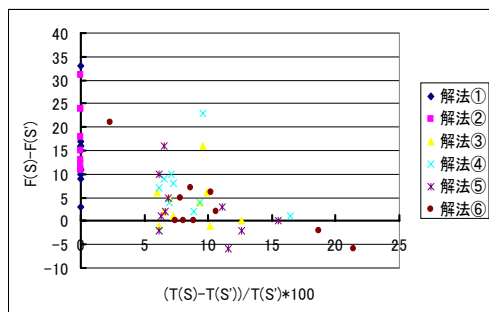


図4 最適解と各近似解法を比較した散布図

$\langle a_i \rangle, \langle c_i \rangle = 1 \sim 9, \langle b_i \rangle = 5$

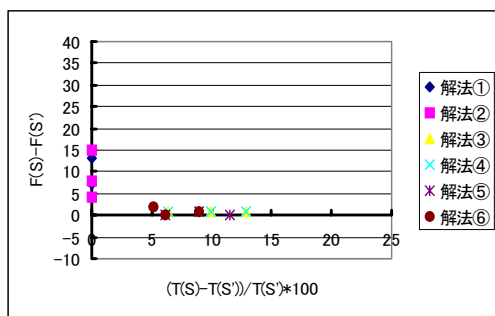


図5 最適解と各近似解法を比較した散布図

$\langle a_i \rangle, \langle c_i \rangle = 4 \sim 6, \langle b_i \rangle = 5$

6. 結論と今後の課題

本研究での結論は以下の通りである。

- ① 割り付けに自由度があり，総所要時間と総滞留時間の2つの評価尺度を持つ2段階フローショップスケジューリング問題のモデル化を行った。
- ② 処理対象間で処理時間がそれぞれ等しい同一ジョブ問題の理論的解析を行った。
- ③ 同一ジョブの問題において，理論的解析から得られた性質を用いた近似解法を考えた。
- ④ 同一ジョブ問題において全探索で得られた最適なスケジュールと，近似解法で得られたスケジュールの総所要時間と総滞留時間とを比較した。
- ⑤ 実験の結果，全204問中全ての問題において最適なスケジュールの総所要時間と，近似解法で得られたスケジュールの総所要時間が完全に一致した。
- ⑥ 総滞留時間においても，全204問中181問一致した。
- ⑦ a_i, c_i を一般化した問題では，総所要時間が最適解とほぼ同じ値になる近似解法を考えた。
- ⑧ a_i, c_i を一般化した問題において，ある範囲では総滞留時間を大きく短縮できる近似解法を考えた。

今後の研究課題として以下のようなことがある。

- ① 要素作業 $\langle b_i \rangle$ の一般化した問題に発展させる。
- ② 作業者によって，要素作業の処理時間が異なる問題について考える。
- ② 素作業数を増加させた時の解析を行う。
- ③ 業者が増えた場合の理論的解析を行う。
- ④ 所要時間，総滞留時間ともに最適なスケジュールになる汎用的な解法を考案する。

謝辞

本研究を進めていく上で，大変お忙しい中，御指導，御支援をいただいた味方勤氏（株式会社ヒューレットパカード）には，多くの助言とアドバイスを頂き大変お世話になりました。この場を借りて厚くお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] 中村善太郎、渡辺一衛：「2段階工程における割り付けと順序付け問題の解法」，Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.31, No.1, pp1-18 (1988)
- [2] Y.Futatsuishi, I.Watanabe and T.Nakanishi, “A Study of Multi-stage Flowshop Scheduling Problem with Alternative Operation Assignments”, International Congress on Modeling and Simulation, vol.4, pp923-928 (1999.12)
- [3] Johnson S.M : “Optimal Two-and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included”, Naval Research Logistic Quarterly, vol.1 (1954)