

企業資産・所得におけるジップの法則

近 匡*1, 小柳文子*2, 藤芳 紘*3

Zipf's law in assets and income of a company

Tadashi KON*1, Fumiko KOYANAGI*2, Hiroshi FUJIYOSHI*3

ABSTRACT: Zipf's law, named after the Harvard linguistic professor George Kingsley Zipf (1902-1950), is the observation that frequency of occurrence of some event (P), as a function of the rank (i) when the rank is determined by the above frequency of occurrence, is a power-law function $P_i \propto 1/i^a$ with the exponent a close to unity. The famous example of Zipf's law is the frequency of the income of a company. In this paper we propose a model which simulates dealings in an industry, where we take the viewpoint of the self-organization of the complexity system. We succeeded to reproduce Zipf's law and to clarify origins of the law.

KEYWORDS: Zipf's law, Power law, Assets of a company, Income of a company

(Received April 2, 2004)

1. はじめに

事象の規模 (Scale) と順位 (Ranking) との積が一定となる, つまり両対数でこの関係を表示したときに傾き-1の直線上に並ぶ事象が世の中には存在する。これが「ジップの法則」である。

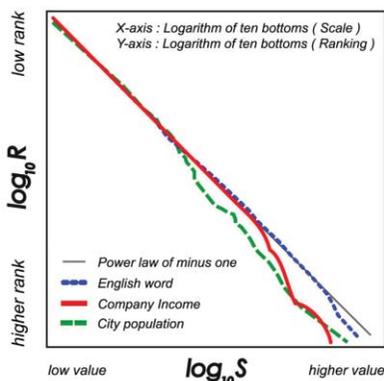


図1 ジップの法則 両対数グラフ [1] [2]

言語学者ジップ (George Kingsley Zipf 1902-1950) は1949年に, ジェームズ・ジョイスの小説「ユリシーズ」に使われた260,430単語(単語の種類:29,899単語)を洗い出し, その出現頻度を調べた結果, 英単語の出現頻度 (Scale) と順位 (Ranking) の積が一定 (図1の破線---) となる, つまり n 番目の単語は頻度1位単語の $1/n$ の確率であられることを発見した。このことからこの経験則は「ジップの法則」と呼ばれるようになった。

この他にも, 企業の所得分布^[1] (図1の太線—) や日本都市の人口分布^[2] (図1の破線---), 地震の規模・映画の観客動員数・ホームページのリンク数など, 様々な対象でジップの法則が確認されている。特に企業の所得分布は, 企業の所得額 (Scale) と所得順位 (Ranking) の積が一定になるという非常に興味深い事象である^[3]。

企業所得は市場において, 2割の企業が8割の所得を得る(パレートの法則)とともに概ね1位企業がその市場の数%を占め, 企業順位に従って所得が減少する傾向がある。市場原理に基づいて企業間取引が行われる場合, 十分長い時間の経過とともに市場形成がなされる。この市場形成をシミュレーションすることは, 経済活動を予測する上で意味深い。

近年, この「ジップの法則」の発見メカニズムを, 階層的構造モデル^[4]や, 平均場近似モデル^[5]で検討しよう

*1 物理情報工学科教授 (kon@apm.seikei.ac.jp)

Professor, Department of Applied Physics

*2 物理情報工学科助手 (koyanagi@apm.seikei.ac.jp)

Research Associate, Department of Applied Physics

*3 物理情報工学科学部4年次生

とする試みがなされてきている。本稿では自己組織化の視点を取り入れたモデルを考えシミュレーションを行うことによって、「ジップの法則」を再現することを試みた。

本稿の構成は以下の通りである。2章ではまず実企業データの解析によるジップの法則の検証を行い、3章に本手法のモデル化とシミュレーションの方法を与える。4章にシミュレーション結果を、5章にはパラメータ依存性の検討などの考察を記述する。また6章と7章にはそれぞれ今後の課題とまとめを述べる。

2. 企業データによるジップの法則の検証

2.1 各業種の企業資産検証における準備

「ジップの法則」はベキ乗分布則の一種であり、ベキ乗分布則とはある量 X の確率分布 Y が (1) 式で表されるものことである。ちなみに A は定数、 β はベキ指数である。この中で β が -1 、つまり両対数で表示したときに傾きが -1 のものを「ジップの法則」という。

$$Y(> x) \propto Ax^\beta \quad (1)$$

企業所得が「ジップの法則」に従うならば、企業資産においてもベキ乗分布に従うと予測し、実企業資産データを検証するため、まず陸運業界の企業資産とその順位 [6] を調査した (表 1, 図 2)。ここでいう企業資産とは、銀行が取り扱う企業資産の総額「総資産額」のことであり、この企業資産の順位 10 位までをとりあげ資産との関係と比較した。従来の比較 (図 1) では、上位で理論値からずれやすいことが知られているが、陸運業界上位においては表 1, 図 2 から、顕著に「ジップの法則」に従っている様子が確認できた。このことより、陸運業界の資産と順位の間には「ジップの法則」が成り立つことが言えそうである。しかしながらこれらの事実を定量的に捉えるためには、何らかの指標が必要とされるであろう。そこで本稿では、産業の独占率を計る指標としてハーフィンダール指数を、またジップ則との乖離を示す指数として、独自に乖離指数を定義し、これらの評価を行うこととした。

表 1 陸運業界上位の資産表 (2002年)

会社名	実資産(百万円)	ジップ則資産(百万円)
日通	1,205,103	1,205,103
ヤマト運	655,877	602,552
西濃運	494,583	401,701
福山運	361,422	301,276
山九	275,570	241,021
日立物流	187,725	200,851
日梱包	137,855	172,158
センコー	127,104	150,638
トナミ	119,243	133,900
第一交通	114,356	120,510

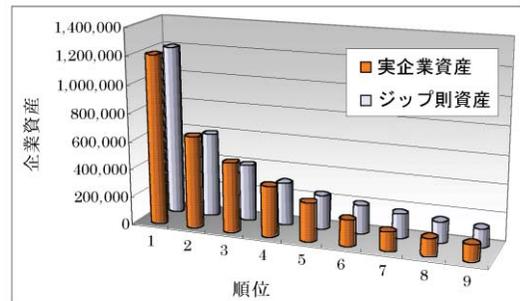


図 2 陸運業界上位の資産グラフ (2002年度)

2.2 ハーフィンダール指数と乖離指数

独占状況を測る指標としてハーフィンダール指数というものがある。これは産業内での上位集中度を測定する際によく用いられる指標であり、(2) 式で与えられる。ここで、 C_i [%] は企業のシェア率を示し、企業数 a までの二乗の和を求めた値がハーフィンダール指数 (HHI) と呼ばれる。1 社独占産業では 10000 であり、十分小さな企業のみで構成される産業では 0 となる。よって、ベキ乗分布を両対数で見るとき、 HHI は分布の傾きを示すものとなる。

$$HHI = \sum_{i=1}^a C_i^2 \quad (2)$$

一方、企業資産の分布と「ジップの法則」との乖離を示す指標として、乖離指数 DI_{proto} を次のように定義した。今、任意順位 i 企業の資産座標 P_i がジップ則資産座標 Z_i と乖離しているとする。この乖離の大きさは、乖離幅の総和を企業数 a で平均化したもので表されると考えら

れる。このことより、乖離指数 DI_{proto} を(3)式のように定義することとした。

$$DI_{proto} = \frac{\sum_{x=1}^a (P_x - Z_x)}{a} \quad (3)$$

ただし、(3)式の DI_{proto} は、数の多い下位企業の乖離を大きく反映してしまう欠点がある。そこで、足し上げる乖離幅を全企業対象とはせず、下位から上位まで全領域での乖離の大きさを一様に反映させる新たな指数 DI を(4)式のように定義した。つまり、図3のような対数目盛上にある企業の乖離幅の総和を平均したものが(4)式の DI である。なお、図3の②は③と①の平均をとった傾き-1の直線であり、「ジップの法則」は傾き-1と平行となるかが重要なため Z_i は②の直線上にあるとする。また、 P_i , Z_i は順位 i 企業の資産をあらわす座標であり、資産の対数で表したものである。

$$DI = DI_1 + DI_2 \quad (4)$$

$$DI_1 = \frac{\sum_{y=0}^{A-1} \sum_{x=1}^9 (P_{x \times 10^y} - Z_{x \times 10^y})}{9 \times A}$$

$$DI_2 = \frac{\sum_{x=1}^{\lfloor a/10^A \rfloor} (P_{x \times 10^A} - Z_{x \times 10^A})}{\lfloor a/10^A \rfloor} * 4$$

$$A = \lfloor \log_{10} a \rfloor$$

*4 $\lfloor \alpha \rfloor$ は絶対値 α を超えない整数であり、 DI_1, DI_2 は図3に示す企業の乖離幅を総和平均したものである。

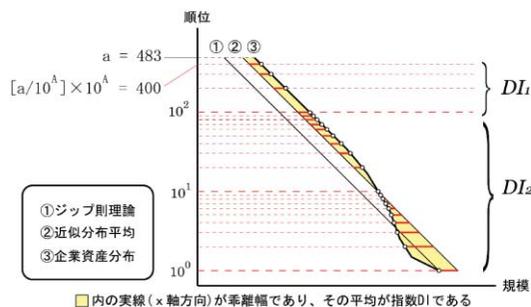


図3 乖離指数の対象となる順位

2.3 各業種の企業資産分布の検証

ここで、各業種における企業資産の分布^[6]を調べた

(図4)。その結果、「ジップの法則」の特徴であるベキ指数-1となる業界もあるが、ベキ指数-1とは異なる業界も存在することがわかった。つぎに、図4の各業種における独占状況を示す HHI と「ジップの法則」との乖離を示す DI を(2),(4)式を用いて計算した(表2)。

その結果、顕著に「ジップの法則」に従っている食品・小売業界では、 HHI が600前後(企業数50の場合)となり、 DI については小さい値となった。一方、建設業界では上位企業資産が横並びであるため、ジップ則に近い業界よりも HHI が小さく DI が大きくなった。巨大産業である建設業界には、大手ゼネコン・準大手ゼネコン・中堅ゼネコンなどと呼ばれる3つ分布階層がある。建設業界の事業は、この3つの階層ごとに大きく異なる。このような階層は図4を見ても確認でき、各々に異なったベキ指数で並んでいる様子が分かる。建設業界は分布を調べることで、事業ごとに企業分布のベキ指数が異なってくることが予測できる。また、自動車・自動車部品業界では、ジップ則に近い業界よりも HHI, DI がともに大きいことから、上位下位の差が大きいベキ指数-0.63程度のベキ乗分布になることがわかる。

これらのことから、各業種における企業資産の分布は、おおよそベキ乗分布であると考えられる。また、1つの業界において、事業別に企業分布を見れば、それらもベキ乗分布則に従うことが予測できる。

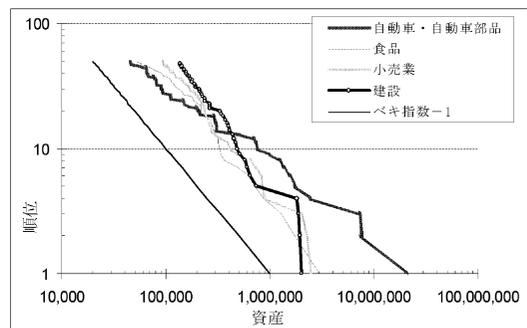


図4 業界別資産分布(2002年度)

表2 業界別の分布状況

各業界	HHI 独占状況	DI [$\times 10^{-2}$] 傾き-1との乖離
自動車…	2050	24.6
食品	669	4.71
小売業	574	5.82
建設	465	10.7

2.4 ベキ指数

日本の多くの企業所得分布は両対数表示で傾き-1となるが、アメリカの企業所得分布は傾き-0.60~-0.70のベキ乗分布⁵⁾となることは興味深い(図5)。この要因は、倒産と参入の条件の違いにあるのではないかとまず考えた。すなわち、アメリカでは経営権が債権者に移行し経営者が交代する機会が多いなど、倒産が起りやすい環境であると考えられる。一方、日本では民事再生法も存在するなど経営者が変わらずに倒産を免れる機会に恵まれているといえる。つぎに参入について考えれば、株式会社発足の条件面を見てもアメリカの方が起業が容易であるといえる。これらをふまえると、日本に比べアメリカの方がより倒産と参入が頻繁に起りやすい開放的な系であると言える。この開放性がベキ指数を決定すると同時にベキ乗分布則の一要因になると予測し、企業活動が動的に散逸構造を持つという視点から、本稿では自己組織化の視点を取り入れたモデルを用いてシミュレーションを行うことにした。

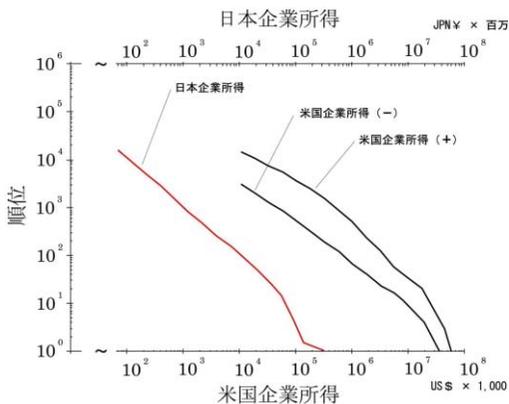


図5 米国企業所得(1995年度)

3. 企業資産・所得シミュレーション

3.1 モデル

本稿のモデルは、多数の企業(初期値は100企業)の中から乱数を用いて2企業を選択し、確率2分の1で敗者から勝者に資産の受け渡し(取引)をさせるモデルとした。その中で単位時間を設け、1単位時間における各企業の取引回数を資産規模に応じた数で設定し、単位時間中の企業資産の変動を所得とした。つまり、この単位時間ごとに出力される企業所得の積み重ねが、任意時間終

了時の企業資産となる。さらに、新規参入企業を採り入れることで、資産値とともに企業数においても可変の開放系モデルとした。これにより全体の企業数は常に変動し、現実企業の資産推移と順位変動とをシミュレーションできるモデルとなった。

なおこのモデルは、全ての企業間の取引を可能としている点で、複数業界を同時にシミュレーションするモデルではなく、1業界におけるシミュレーションをモデル化したものである。

3.2 アルゴリズム

プログラム言語としては計算・作表・描画を同時に行える*JAVA*を選択した。次にプログラムのアルゴリズムを説明する。

- ① 簡単のため、全ての企業において資産1の初期値を与える。
- ② 各企業、1単位時間に取引させる回数を自らの企業資産に比例した回数(厳密には取引回数×乱数割合とした)で設定。
- ③ 取引する2企業を乱数にて選択する。ここで、A社が選択される可能性は(A社の残り取引数/全企業の残り取引数)となるよう乱数を設定した。
- ④ 2企業の内、乱数を用いて確率2分の1で勝者と敗者を決定。
- ⑤ 2企業の内少ない方の企業資産の20%を敗者から勝者へ移動し、2企業の残り取引数を1引く。
- ⑥ 残り取引数1以上の企業が1社以下(この時取引可能企業が1社未満となるため取引不能)とならない限り③に戻る。
- ⑦ 1単位時間分の取引を終了したとき、単位時間内に移動した資産を計算し所得として出力。
- ⑧ ここで、企業資産1未満となった企業を倒産企業と位置付け排除。
- ⑨ 業界規模の目安となる1位企業資産を調べると資産1となる理論順位がわかる、その順位(ジップ則では1位企業資産と同値)から現在の最下位順位(ジップ則では全企業数と同値)を引いた値が正のとき参入余地があるとみなし、この値と同量の新規企業を資産1で注入。
- ⑩ 単位時間を1進めて②に戻る。

4. 結果

4.1 シミュレーション結果

3.2節のアルゴリズムのもとで、取引率20%、初期企業数100をとりシミュレーションすると、単位時間を経過するごとに徐々に「ジップの法則」が現れた。この現れ方が顕著となった単位時間4500時に出力されたものを最終結果として図6に示す。図6のように企業資産・所得ともに精度良く「ジップの法則」を再現できた。また、本稿のシミュレーションツールの説明を図6に与えた。

4.2 順位のゆらぎ

各企業の存在順位により企業の安定度を示す指標として資産順位のゆらぎを調べた。その結果を図7の①, ②, ③に示す。これは、図7の①を例として説明すると、200位に存在した企業が200単位時間経過までにどのような順位を推移してゆくかを出力したものである。図7の①, ②は、総企業数が3000社強の時点での任意企業の順位ゆ

らぎを示すものである。①と②を比べると、上位企業のほうが順位のゆらぎが少なく安定している様子がうかがえる。一方、下位企業は順位のゆらぎが大きく不安定である。また、図7の③は、総企業数が10000社前後まで業界が成長した時点の、特に順位のゆらぎが激しい企業の順位推移である。これを見ると、安定していた2000位から偶然業績が悪化し順位を落とすと、下位企業に近づくにつれ順位のゆらぎが大きくなっている様子がうかがえた。

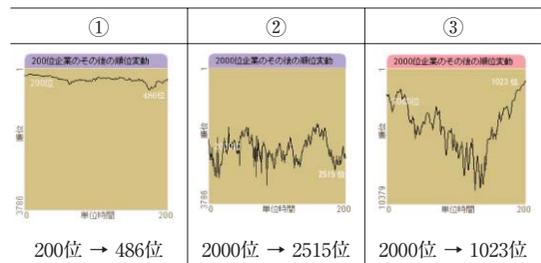


図7 任意企業の順位推移

単位時間ごとに出力される企業資産・所得を両対数で表示するウィンドウであり、業界が成長してゆく過程を確認することができる

指定順位企業が200単位時間内でどのような順位を推移してゆくかを確認できるウィンドウ

パラメータをテキストボックス等に入力することで、異なるシミュレーションをすぐに実行可能とした

シミュレーション企業のイメージを表示するウィンドウであり、表示される企業は乖離指数で扱う数とした

乖離指数が時間変化でどのような値を示すかが確かめられる

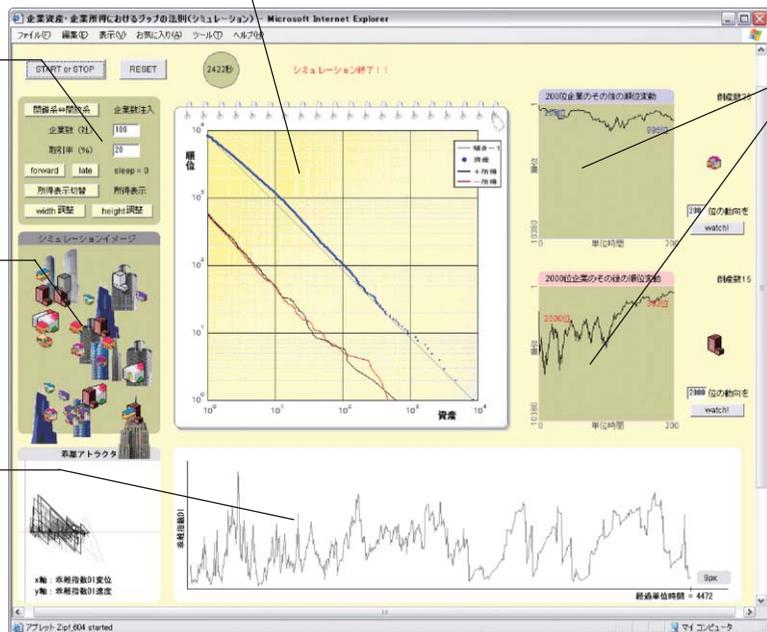


図6 シミュレーション結果とツールの説明

5. 考察

5.1 分布の特徴を捉える

企業資産・所得におけるベキ乗分布では、平均値の周辺に分布の偏りがなく、たとえ系内のどの順位に企業が入力されても分散無限大という動的定常状態に収束する性質を持つ。このような性質から散逸構造を持つことが考えられる。散逸構造論が示した自己組織化の起こる3つの基本条件は表3の通りである[7]。このことをふまえて、アルゴリズムに倒産企業と新規参入企業を別個に導入し、注入効果とした(表4)。これにより系内の総要素数は動的となった。

表3 散逸構造における自己組織化の条件

1.	外部との開放性-外部とのエネルギーの交換があること。エントロピーを放出できること。
2.	非平衡な状態
3.	ポジティブ・フィードバックの存在-自己触媒プロセスの存在

表4 注入効果

1.	倒産	:	系外へ要素を排出する
2.	新規参入	:	系内への入力

5.2 パラメータの依存性

各パラメータの設定により、「ジップの法則」があらわれるかどうかに変化が見られた。ここでは、企業間取引のモデル化から、ジップ則の再現に至ったアルゴリズムを採り上げ、各パラメータの影響を下記に述べる。

5.2.1 勝率と移動資産

企業間取引を仮定する際、現実の勝率というものは単純に企業規模に比例するわけではない。複雑で未確認のパラメータを設定する訳にはいかないため、ここでは勝率を企業規模に関わらず簡単に2分の1とし、この勝率をふまえて他のパラメータを決定した。まず、2企業選択後の企業間取引の際に移動する資産額は小規模企業に比例(取引率)する額とした。大規模企業に比例する額とすると小規模企業が簡単に大きな所得を得ることが可能となり現実と異なった(図8)。従って、移動資産を(5)式とした。

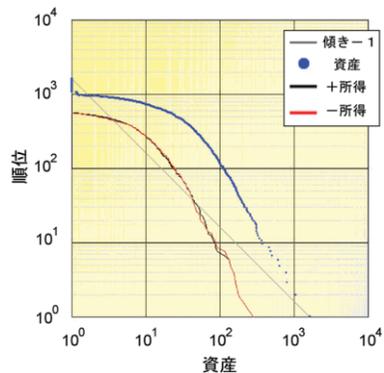


図8 大規模企業から資産移動

$$\text{移動資産} = \text{小規模企業の資産} \times \text{取引率} \quad (5)$$

5.2.2 取引回数

つぎに単位時間内の企業活動について考えた。基本的には、資産を多く保有する企業つまり大規模企業ほど長期投下資本や銀行借入を有利に展開することが可能であり、活発に行動することが予想される。そこで、単位時間内での企業活動として各企業に(6)式の取引回数を設定した。

$$\text{取引回数} = \text{資産の整数化} \times \text{乱数割合} \quad (6)$$

5.2.3 乱数割合

当初取引回数は、単に「資産の整数化」の回数を設定していた。しかし、企業活動が完全に自己資産に比例する系では「ジップの法則」はあられわず、1位企業の独占市場が形成されるとともに、ベキ指数が-1よりも小さい中小規模企業の差の少ない横並びに近い状態となった(図9)。そこで、投下資本は常に限界を保つのではなく、年ごとに活発化したり沈静化したりする現実の現象をふまえて、取引回数として(3)式のように整数化した資産に1~100の一様乱数(%)をかけたものとした。ここで、乱数割合の設定による結果の違いを表5に示す。

表5 乱数割合の設定による各結果

企業数*5	乱数割合	「ジップ則」	対応図
1. 開放系	100%*6	×	図9
2. 開放系	1~100%	○	図6
3. 開放系	1~50%	×	図10
4. 閉鎖系	60~100%	○	-

*5 開放系:企業数増加の系,閉鎖系:企業数不変の系

*6 この場合は純粋に、取引回数=資産の整数化

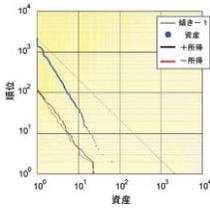


図9 純粋に資産の整数化を行った場合(表5の1.)

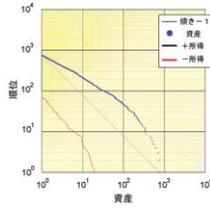


図10 50%以下の乱数割合とした場合(表5の3.)

5.2.4 2企業を選択する乱数

同業界を考えると、細分化した分野においても、上位企業の影響力は強く、下位企業は其中でせめぎあってゆかねばならない。このことから、上位企業の影響力が強く、かつ各企業が与えられている取引回数を可能な限り消費するアルゴリズムが必要である。本稿では、企業間取引を行う2企業を選択する乱数を、各時点での残り取引回数に依存させることで解決した。これにより、残り取引回数の多い企業すなわち大規模企業から取引の場に選ばれることとなる。この要素を考えないと、大規模企業が1単位時間にほとんど活動しない現象が起こり得る。

5.2.5 取引率と初期企業数

取引率においてはパラメータを変えても、「ジップの法則」があらわれた。ただし、違いは存在し、詳細を表6にまとめた。表6の通り、取引率を低く設定した際、必要な単位時間は多いが「ジップの法則」の特徴が精度良くあらわれるという結果となった。一般に、取引率の低い場合や初期企業数が少ない場合には「ジップの法則」に到達するのに時間がかかることが言えた。一方、取引率を過度に大きい値で設定すると初期企業数が少ない場合に、1社を残して他の企業全てが倒産し、業界が消滅する場合が存在した。

表6 取引率による結果の違い

10%	← 取引率 →	100%
長い	ジップ則に達する時間	短い
良い	精度	悪い
小さい	順位のゆらぎ	大きい
小さい	毎単位時間所得の平均	大きい
低い	各企業の倒産確率	高い

6. 今後の課題

本稿モデルにより、「ジップの法則」を再現することができたが、より現実的なモデルへの改善余地として、分社化と需要について考えた。

6.1 分社化

最も大きな改善余地としては、新規参入企業のアルゴリズムである。本稿では、簡単のため1位企業の資産に注目し、この1社の資産上昇時に新規企業を参入させた。これは現実をモデル化したとは言い切れない。そこで、モデルを発展させるならば、生物学の細胞分裂のように、現存企業から新規企業を誕生させるモデルが思いつく。これは現存企業から子会社が誕生する現象や、企業の構成員が脱サラをして新規企業を旗揚げするような現象を簡単にモデル化したものである。その際には系列会社の概念を採り入れることが可能である。また、どのようときに新規企業が誕生するかが、企業分布のベキ指数を決める一要因となると考えるため、この点に注目すれば「ジップの法則」とは異なるベキ指数を持つ分布を再現することが可能であると考えられる。

6.2 需要

企業が所得を得るのに需要が必要であることは、周知の事実である。需要は景気との関係が深い。好景気の際には需要が下位企業にまで達し、業界全体が所得を得易い。不景気の際には需要が減少し全体が所得を得にくいと同時に、下位企業までは需要が回らず倒産企業が増加する。このような需要の概念を採り入れることにより、本稿モデルのような好景気が続き業界がどこまでも成長するモデルから、より現実的な需要と供給の飽和現象を再現できるシミュレーションモデルとなると考えられる。

6.3 その他の改善余地

その他の改善余地として以下のことが挙げられる。

- 1) 日本企業資産・所得シミュレーション
複数業界に異なる取引回数を与え同時にシミュレーションする。
- 2) 企業間取引を事業ごとに考えた細分化
事業ごとに異なる取引率を与える。
- 3) 吸収や合併の概念
一定の条件が満たされた際に吸収や合併を行わせる。

7. まとめ

企業データによる「ジップの法則」の検証を行い、企業資産とその順位の関係がベキ乗分布則に従うことを確認した。散逸構造による自己組織化の概念をアルゴリズムに採り入れたモデルを構築し、企業資産・所得シミュレーションを行った結果、「ジップの法則」を高い精度で再現することができた。このとき、順位のゆらぎについては上位企業で小さく下位企業ほど大きいことから、上位企業は安定し易く下位企業は順位変動の激しい倒産し易い状態であることがいえた。また、各企業が企業を選ばずどの対象とも企業間取引をする可能性を持たせたとき、これは同業種特に同事業内での企業間取引であると考えられ、その資産・所得分布は、顕著にベキ乗分布則に従うことがわかった。このような企業資産・所得とその順位の関係が一定となる「ジップの法則」の再現にあたり必要な要因は、倒産企業としての系外への排出、新規参入企業としての系内への入力、企業間取引による内部凝縮であることを明らかにすることができた。

謝辞

アルゴリズムの正当性やシミュレーションツールの設計においてご協力いただいたお茶の水女子大学研究員鴨下淳一氏に感謝いたします。また、経済学の視点に基づく分析法についてご助言をいただいた成蹊大学経済学部の井出多加子教授にお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] 『別冊週間ダイヤモンド (1998年7月号)』, ダイヤモンド社, 1998.
- [2] 都道府県市区町村ごとの人口に関する H P ,
<http://www.glin.org/glin/index.html>
- [3] 高安秀樹, 『複雑系のフラクタルゆらぎ』, 森本出版, 1998.
- [4] 企業所得のジップ則に関する H P ,
<http://www.phys.aoyama.ac.jp/~kenji/soturon.pdf>
- [5] 企業所得のモデル化に関する H P ,
<http://bluestar.phys.h.kyoto-u.ac.jp/yitp2003/presentations/mizuno.pdf>
- [6] 各業種の資産合計に関する H P ,
<http://rank.nikkei.co.jp/money/shisan.cfm>
- [7] 自己組織化に関する H P ,
<http://www.nanoelectronics.jp/kaitai/selfassemble/2.htm>