

## 等方性および1軸性電気光学結晶の 電気光学効果と逆圧電効果の解析

滝沢 國治\*

Analysis of electro-optic and inverse-piezoelectric effects in isotropic and uniaxial electro-optic crystals

Kuniharu TAKIZAWA\*

**ABSTRACT**: Conventional electro-optic (EO) devices have been designed based on only the EO effect, and the inverse-piezoelectric (IP) effect has been ignored. In the case of bulk EO devices that control the retardation between the ordinary ray and the extraordinary ray, there is hardly any problem in defiance of the IP effect. However, for waveguide devices which control only the ordinary or extraordinary ray, the longitudinal IP effect that changes the optical path length in the EO crystal is important as well as the EO effect. In this paper, electro-optically induced phase shifts of light propagating in isotropic and uniaxial EO crystals are analyzed in consideration of both of the EO and IP effects. Various crystal configurations are summarized with particular attention to optical communication and optical image processing applications.

**KEYWORDS**: Electro-optic effect, Pockels effect, Piezoelectric effect, Electro-optic crystal, Isotropic crystal, Uniaxial crystal

(Received September 6, 2004)

### 1. まえがき

電気光学効果は、結晶の屈折率が印加電界によって変化する現象であり、直流からマイクロ波周波数まで応答するため、光変調器や光偏向器などによく用いられている。電気光学効果には、屈折率が印加電界に比例する1次の効果(Pockels効果)と、印加電界の2乗に比例する2次の効果(Kerr効果)がある。Kerr効果は全ての材料に存在するのに対し、Pockels効果は反像対象性(結晶中のある点から $r$ の位置の原子を $-r$ に移すと元の結晶構造と一致する性質)を欠く結晶にのみ存在する。一般的にKerr効果はPockels効果よりも格段に小さいため、反像対

象性の無い結晶では、Pockels効果だけに着目すれば十分である。この論文では光エレクトロニクス応用で重要である、半像対称性を欠く電気光学結晶に限定して、議論を進めることとする。

光エレクトロニクスで用いられる各種の電気光学デバイスは印加電界による光の位相変化を干渉を利用して光の強度変化に変える、あるいはこの位相変化により光の伝搬方向を変化させるなどの原理に基づいているが、素子構成によっては屈折率変化のみならず光路長変化が位相変化に影響を与える場合がある。<sup>1-7</sup>すなわち、電気光学結晶は圧電性を有するため、結晶に電界を加えると電界の大きさに比例して結晶中に伸びおよび縮みなどの歪が生じる。これは圧電効果(固体に力を加えると電荷が生じる)の逆の現象であり、逆圧電効果と呼ばれる。この効果と類似の現象に電歪(固体の形状の変化が電界の2

\* 物理情報工学科教授 (takizawa@apm.seikei.ac.jp)

Professor, Department of Applied Physics

乗に比例する)があるが、その大きさは逆圧電効果に比べて一般に非常に小さいため、ここでは省略する。逆圧電効果により生じた歪は光弾性効果により屈折率に影響を与えるほか、光路長も変化させる。

従来、この逆圧電効果に基づく光路長変化にはほとんど注意が払われていなかった。たとえば Michelson 干渉計や Mach-Zehnder 干渉計などを用いて光の位相変化の計測から結晶の電気光学係数を評価する場合、これまでは逆圧電効果に基づく位相変化を電気光学効果に基づく位相変化に含めて低周波領域の電気光学係数を求めていた。<sup>8,9</sup> 電気光学効果の機構を考察する場合、あるいは実際の素子設計においてもこのような取扱いは問題である。特に薄膜光導波管デバイスでは光の位相変化を直接利用している場合が多く、逆圧電効果に基づく光路長変化の考慮は素子設計上必要である。

この論文では、等軸性および一軸性結晶の電気光学効果に基づく屈折率変化および逆電圧効果に基づく歪テンソルの変化を解析する。この中でも光デバイスへの応用上特に重要と考えられる幾つかの点群に属する結晶について、印加電界方向と光の位相変化の関係を明らかにする。さらに、印加電界による屈折率変化と光路長変化から求められる実効的電気光学係数を示すとともに、素子設計および電気光学係数の測定において従来見落とされていた幾つかの問題点を指摘する。

## 2. 結晶透過光の印加電界による位相変化

電気光学結晶に電界を加えると、電気光学効果によりその屈折率が変化すると共に、逆圧電効果により結晶長が変化する。従って、応力一定の状態にある結晶に電界を印加する場合、透過光の印加電界による位相変化は、

$$= \frac{2}{\lambda} [(n + \Delta n)(l + \Delta l) - nl] \cong \frac{2}{\lambda} (\Delta n l + n \Delta l) \quad (1)$$

で与えられる。ただし  $\lambda$  は真空中の光の波長、 $n$  および  $l$  は電界を加えないときの結晶の屈折率および光路長である。 $\Delta n$  は電気光学効果に基づく屈折率変化であり、 $\Delta l$  は逆圧電効果に基づく光路長変化である。 $n$ 、 $n$  および  $l$  は結晶の対称性、印加電界方向および光の伝搬方向に依存する。

以下では、はじめに結晶に電界を加えたときの屈折率楕円体と歪の一般式を求める。次に等軸性およ

び一軸性結晶の幾つかの点群において、光デバイスへの応用上重要と思われる素子構成とそこを伝播する光の位相変化の関係を明らかにする。

## 3. 屈折率楕円体の係数と印加電界の関係

結晶に電界を加えると電気光学効果および光弾性効果により屈折率および主軸方向が変化する。結晶中での光の伝搬特性は屈折率楕円体により完全に記述することができるから、電界を印加したときの屈折率楕円体の係数の変化を求めれば、屈折率変化を明らかにすることができる。

等軸性および一軸性結晶の結晶軸  $x_m$  ( $m=1, 2, 3$ ) にそって電界  $E_m$  を印加すると、屈折率楕円体は一般に

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{n_1^2} + r_{1m} E_m \right) X_1^2 + \left( \frac{1}{n_2^2} + r_{2m} E_m \right) X_2^2 \\ & + \left( \frac{1}{n_3^2} + r_{3m} E_m \right) X_3^2 + 2r_{4m} E_m X_2 X_3 \\ & + 2r_{5m} E_m X_1 X_3 + 2r_{6m} E_m X_1 X_2 = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。ただし、三方晶系および六方晶系は斜方晶系で表されるものとする。 $n_1, n_2, n_3$  は印加電界が 0 のときの結晶軸  $x_1, x_2, x_3$  方向の屈折率である。 $r_{1m} \sim r_{6m}$  は応力一定の状態にある結晶の電気光学係数であり、歪一定の状態にある結晶の電気光学係数に圧電定数と光弾性定数の積を加えた定数である。

また、 $r_{im} E_m$  は Einstein summation convention に従っており、以下の式と同等である。

$$r_{im} E_m = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

式(2)を下式に示すような形に主軸変換すると、電界を印加したときの結晶の屈折率  $n'_1, n'_2, n'_3$  および主軸方向  $x'_1, x'_2, x'_3$  を求めることができる。

$$\frac{X_1'^2}{n_1'^2} + \frac{X_2'^2}{n_2'^2} + \frac{X_3'^2}{n_3'^2} = 1 \quad (4)$$

式(2)から式(4)に厳密に変換できる場合は少ないが、多くの場合、結晶中の光の伝搬方向を選択する

ことにより、式(4)の座標軸の一つを0にした楕円の式に変換して屈折率を求めることが可能である。例えば、 $x_3$ を光軸とする一軸性結晶の結晶軸  $x_m$  に平行に電界を加え、光の進行方向を  $x_i$  ( $i=1, 2$ )に平行にすると、電気光学係数  $r_{im}$  で表される屈折率変化を容易に求めることができる。しかし、 $r_{4m}$ 、 $r_{5m}$ 、 $r_{6m}$ 等の係数で表される屈折率変化を知るためには、式(2)で表される屈折率楕円体を座標変換し、 $x'_1, x'_2, x'_3$ などの交差項を消去できる新しい座標軸  $x'_1, x'_2, x'_3$ を求めなければならない。ここでは直交座標軸  $x_1, x_2, x_3$ をその原点のまわりに任意の角度に回転して得られる新座標軸  $x'_1, x'_2, x'_3$ を用いて屈折率楕円体を表し、その交差項成分が0になる回転角度、あるいはその成分を無視できる角度を求めることにより、等軸性および一軸性結晶の印加電界による屈折率変化を解析する。

初めに直交座標系の変換を次のように行う。まず、図1(a)に示すように  $x_3$ を軸として角度  $\psi$ だけ  $x_3$ に垂直な面を回転すると、別の座標軸  $x_1, x_2, x_3$ が得られる。

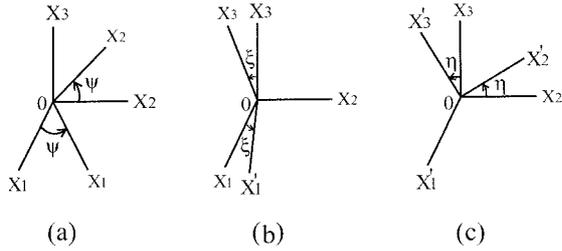


図1 直交座標変換

次に同図(b)に示すように  $x_2$ を軸として、 $x_2$ に垂直な面を角度  $\phi$ だけ回転すると、さらに別の座標軸  $x'_1, x'_2, x'_3$ が得られる。さらに、同図(c)に示すように  $x'_1$ を軸として  $x'_1$ に垂直な面を角度  $\eta$ だけ回転すると、原点0のまわりに任意の角度に回転した新しい座標  $x'_1, x'_2, x'_3$ が得られる。新座標軸と旧座標軸  $x_1, x_2, x_3$ との間には次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \psi & \sinh \psi \\ 0 & -\sinh \psi & \cosh \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \psi \cos \psi & \cosh \psi \sin \psi & 0 \\ -\sinh \psi \sin \psi + \sinh \psi \cos \psi & \sinh \psi \cos \psi + \sinh \psi \sin \psi & 0 \\ \sinh \psi \sin \psi + \cosh \psi \cos \psi & -\sinh \psi \cos \psi + \cosh \psi \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

結晶の屈折率は光の伝搬方向と光電界の振動方向に依存するため、任意の方向の屈折率を求めるためには式(5)に示す  $x, y, z$  で表される3個の独立な回転角度が必要である。式(5)を式(2)に代入して交差項を消去できる角度を求めれば、電界を印加したときの結晶の屈折率を導出することができる。

新座標軸を用いて式(2)の屈折率楕円体を

$$A_1 X_1'^2 + A_2 X_2'^2 + A_3 X_3'^2 + A_4 X_2' X_3' + A_5 X_1' X_3' + A_6 X_1' X_2' = 1 \quad (6)$$

と書き改めると、係数  $A_i$  は次式で与えられる。

$$A_1 = \cos^2 x \left( \frac{\cos^2 y}{n_1^2} + \frac{\cos^2 y}{n_2^2} \right) + \frac{\sin^2 x}{n_3^2} + [\cos^2 x (r_{1m} \cos^2 y + r_{2m} \sin^2 y + r_{6m} \sin^2 y) + r_{3m} \sin^2 x - \sin 2x (r_{4m} \sin y + r_{5m} \cos y)] E_m, \quad (7a)$$

$$A_2 = \frac{1}{n_1^2} \left( \cos^2 h \sin^2 y + \sin^2 h \sin^2 x \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y \right) + \frac{1}{n_2^2} \left( \cos^2 h \cos^2 y + \sin^2 h \sin^2 x \sin^2 y + \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y \right) + \frac{1}{n_3^2} \sin^2 h \cos^2 x + [r_{1m} (\cos^2 h \sin^2 y + \sin^2 h \sin^2 x \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y) + r_{2m} (\cos^2 h \cos^2 y + \sin^2 h \sin^2 x \sin^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y) + r_{3m} \sin^2 h \cos^2 h + r_{4m} (\sin^2 h \sin 2x \sin y + \sin 2h \cos x \cos y) + r_{5m} (\sin^2 h \sin 2x \cos y - \sin 2h \cos x \sin y) + r_{6m} (\sin^2 h \sin^2 x \sin 2y + \sin 2h \sin x \cos 2y - \cos^2 h \sin 2y)] E_m, \quad (7b)$$

$$A_3 = \frac{1}{n_1^2} \left( \sin^2 h \sin^2 y + \cos^2 h \sin^2 x \cos^2 y + \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y \right) + \frac{1}{n_2^2} \left( \sin^2 h \cos^2 y + \cos^2 h \sin^2 x \sin^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y \right) + \frac{1}{n_3^2} \cos^2 h \cos^2 x + [r_{1m} (\sin^2 h \sin^2 y + \cos^2 h \sin^2 x \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y) + r_{2m} (\sin^2 h \cos^2 y + \cos^2 h \sin^2 x \sin^2 y - \frac{1}{2} \sin 2h \sin x \sin 2y) + r_{3m} \cos^2 h \cos^2 x + r_{4m} (\cos^2 h \sin 2x \sin y - \sin 2h \cos x \cos y) + r_{5m} (\cos^2 h \sin 2x \cos y + \sin 2h \cos x \sin y) + r_{6m} (\cos^2 h \sin^2 x \sin 2y - \sin^2 h \sin 2y - \sin 2h \sin x \cos 2y)] E_m, \quad (7c)$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & \frac{1}{n_1^2}(\sin 2h \sin^2 x \cos^2 y - \sin 2h \sin^2 y - \cos 2h \sin x \sin 2y) \\
& + \frac{1}{n_2^2}(\sin 2h \sin^2 x \sin^2 y + \cos 2h \sin x \sin 2y - \sin 2h \cos^2 y) \\
& + \frac{1}{n_3^2} \sin 2h \cos^2 x + [r_{1m}(\sin 2h \sin^2 x \cos^2 y - \sin 2h \sin^2 y \\
& - \cos 2h \sin x \sin 2y + r_{2m}(\sin 2h \sin^2 x \sin^2 y - \sin 2h \cos^2 y \\
& + \cos 2h \sin x \sin 2y) + r_{3m} \sin 2h \cos^2 x + r_{4m}(\sin 2h \sin 2x \sin y \\
& + 2 \cos 2h \cos x \cos y) + r_{5m}(\sin 2h \sin 2x \cos y - 2 \cos 2h \cos x \sin y) \\
& + r_{6m}(\sin 2h \sin 2y + \sin 2h \sin^2 x \sin 2y + 2 \cos 2h \sin x \cos 2y)] E_m,
\end{aligned} \quad (7d)$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & \frac{1}{n_1^2}(\sin h \cos x \sin 2y + \cos h \sin 2x \cos^2 y) + \frac{1}{n_2^2}(\cos h \sin 2x \sin^2 y \\
& - \sin h \cos x \sin 2y) - \frac{1}{n_3^2} \cos h \sin 2x + [r_{1m}(\sin h \cos x \sin 2y \\
& + \cos h \sin 2x \cos^2 y) + r_{2m}(\cos h \sin 2x \sin^2 y - \sin h \cos x \sin 2y) \\
& - r_{3m} \cos h \sin 2x + 2r_{4m}(\sin h \sin x \cos y + \cos h \cos 2x \sin y) \\
& + 2r_{5m}(\cos h \cos 2x \cos y - \sin h \sin x \sin y) + r_{6m}(\cos h \sin 2x \sin 2y \\
& - 2 \sin h \cos x \cos 2y)] E_m,
\end{aligned} \quad (7e)$$

$$\begin{aligned}
A_6 = & \frac{1}{n_1^2}(\sin h \sin 2x \cos^2 y - \cos h \cos x \sin 2y) \\
& + \frac{1}{n_2^2}(\cos h \cos x \sin 2y + \sin h \sin 2x \sin^2 y) \\
& - \frac{1}{n_3^2} \sin h \sin 2x + [r_{1m}(\sin h \sin 2x \cos^2 y - \cos h \cos x \sin 2y) \\
& + r_{2m}(\cos h \cos x \sin 2y + \sin h \sin 2x \sin^2 y) - r_{3m} \sin h \sin 2x \\
& + 2r_{4m}(\sin h \cos 2x \sin y - \cos h \sin x \cos y) \\
& + 2r_{5m}(\cos h \sin x \sin y + \sin h \cos 2x \cos y) \\
& + r_{6m}(2 \cos h \cos x \cos 2y + \sin h \sin 2x \sin 2y)] E_m.
\end{aligned} \quad (7f)$$

#### 4. 結晶の歪変化と印加電界の関係

圧電性結晶に電界を印加すると歪が発生する。結晶が応力一定の状態にあるとき，結晶軸  $X_m$  と平行に電界  $E_m$  を加えると，歪テンソル  $S_{ij}$  は

$$S_{ij} = d_{mij} E_m \quad (8)$$

で与えられる。ここで  $d_{mij}$  は圧電定数である。歪  $S_{ij}$  は対称 2 階テンソル，圧電定数  $d_{mij}$  は対称 3 階テンソルであるから，

$$S_k = d_{mk} E_m \quad (9)$$

という簡略した表記法で表すことができる。この簡略した添字  $k$  と式(8)の完全な表記法の  $ij$  の間には，表 1 の関係が成立する。

表 1 完全表記法と簡略表記法の関係

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 完全表記法 | ij | 11 | 22 | 33 | 23 | 32 | 31 | 13 | 12 | 21 |
|       |    | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  |
| 簡略表記法 | k  | 1  | 2  | 3  | 4  | 4  | 5  | 5  | 6  | 6  |

既に登場した電気光学係数  $r_{ij}$  は簡略表記法に従って記述されている。歪および圧電定数はしばらくの間完全表記法に従って記述し，電気光学効果と合わせて光の位相変化を記述する際に，簡略表記法で統一することとする。

図 1(a)に示す座標変換を結晶に施すと， $S_{ij}$  は次式に示す  $S'_{ij}$  に変換される。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} \\ S'_{21} & S'_{22} & S'_{23} \\ S'_{31} & S'_{32} & S'_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos y & \sin y & 0 \\ -\sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \\
&\cdot \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (10)$$

式(10)の右辺を演算すると歪の各成分は次のようになる。

$$S'_{11} = S_{11} \cos^2 y + S_{22} \sin^2 y + S_{12} \sin 2y, \quad (11a)$$

$$S'_{12} = S'_{21} = S_{12} \cos 2y + \frac{1}{2}(S_{22} - S_{11}) \sin 2y, \quad (11b)$$

$$S'_{13} = S'_{31} = S_{13} \cos y + S_{23} \sin y, \quad (11c)$$

$$S'_{22} = S_{11} \sin^2 y + S_{22} \cos^2 y - S_{12} \sin 2y, \quad (11d)$$

$$S'_{23} = S'_{32} = S_{23} \cos y - S_{13} \sin y, \quad (11e)$$

$$S'_{33} = S_{33}. \quad (11f)$$

次に図 1(b)に示す座標変換を結晶に施すと，歪テンソル成分  $S''_{ij}$  は次式で与えられる。

$$S''_{11} = S'_{11} \cos^2 x + S'_{33} \sin^2 x - S'_{13} \sin 2x, \quad (12a)$$

$$S''_{12} = S''_{21} = S'_{12} \cos x - S'_{23} \sin x, \quad (12b)$$

$$S''_{13} = S''_{31} = S'_{13} \cos 2x + \frac{1}{2}(S'_{11} - S'_{33}) \sin 2x, \quad (12c)$$

$$S''_{22} = S'_{22}, \quad (12d)$$

$$S''_{23} = S''_{32} = S'_{12} \sin x + S'_{23} \cos x, \quad (12e)$$

$$S''_{33} = S'_{11} \sin^2 x + S'_{33} \cos^2 x + S'_{13} \sin 2x. \quad (12f)$$

さらに図 1(c)に示す座標変換を結晶に施すと，歪テンソル成分 $S''_{ij}$ は次式で与えられる。

$$S''_{11} = S''_{11} \quad (13a)$$

$$S''_{12} = S''_{21} = S''_{12} \cos \mathbf{h} + S''_{13} \sin \mathbf{h}, \quad (13b)$$

$$S''_{13} = S''_{31} = S''_{13} \cos \mathbf{h} - S''_{12} \sin \mathbf{h}, \quad (13c)$$

$$S''_{22} = S''_{22} \cos^2 \mathbf{h} + S''_{33} \sin^2 \mathbf{h} + S''_{23} \sin 2\mathbf{h}, \quad (13d)$$

$$S''_{23} = S''_{32} = S''_{23} \cos 2\mathbf{h} + \frac{1}{2}(S''_{33} - S''_{22}) \sin 2\mathbf{h}, \quad (13e)$$

$$S''_{33} = S''_{33} \cos^2 \mathbf{h} + S''_{22} \sin^2 \mathbf{h} - S''_{23} \sin 2\mathbf{h}. \quad (13f)$$

式(8)，式(11)，式(12)および式(13)を用いれば $X'_i$ ( $i=1, 2, 3$ )方向の単位長あたりの結晶長変化 $S'''_{ij}$ を求めることができるから，

$$\Delta \ell = S'''_{ij} \ell \quad (14)$$

より逆圧電効果に基づく光路長変化を導くことができる。ただし， $\ell$ は光の進行方向の電界を印加しないときの結晶長である。

## 5．等軸性結晶を透過する光の印加電界による位相変化

前節までの解析で結晶に電界を印加したときの屈折率変化および歪テンソルの変化の一般式を導出した。ここでは5種類の等軸性結晶(対称性: 23, 432,  $m\bar{3}$ ,  $\bar{4}3m$ ,  $m3m$ )の中で電気光学効果(Pockels効果)を有する立方晶系(対称性: 23,  $\bar{4}3m$ )に電界を印加したとき，結晶透過光の位相変化を明らかにする。

立方晶系結晶の屈折率は， $n_1 = n_2 = n_3 = n_0$  ( $n_0$ は常光線屈折率)であり，その電気光学係数 $r_{ij}$ は，

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{41} \end{pmatrix} \quad (15)$$

である。従って，式(15)を式(7)に代入し，交差項係数 $A_4, A_5, A_6$ が0になるように回転角度 $\alpha, \beta, \gamma$ を設定すれば，次の立方晶系結晶の屈折率を得る。

$$n'_1 = n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 E_m r_{41} (\sin 2x \sin y + \sin 2x \cos y - \cos^2 x \sin 2y), \quad (16a)$$

$$n'_2 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 E_m r_{41} \begin{pmatrix} \sin^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{x} \sin \mathbf{y} \\ + \sin 2\mathbf{h} \cos \mathbf{x} \cos \mathbf{y} \\ + \sin^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{x} \cos \mathbf{y} \\ - \sin 2\mathbf{h} \cos \mathbf{x} \sin \mathbf{y} \\ + \sin^2 \mathbf{h} \sin^2 \mathbf{x} \sin 2\mathbf{y} \\ + \sin 2\mathbf{h} \sin \mathbf{x} \cos 2\mathbf{y} \\ - \cos^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (16b)$$

$$n'_3 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 E_m r_{41} \begin{pmatrix} \cos^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{x} \sin \mathbf{y} \\ - \sin 2\mathbf{h} \cos \mathbf{x} \cos \mathbf{y} \\ + \cos^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{x} \cos \mathbf{y} \\ + \sin 2\mathbf{h} \cos \mathbf{x} \sin \mathbf{y} \\ + \sin^2 \mathbf{h} \sin^2 \mathbf{x} \sin 2\mathbf{y} \\ - \sin^2 \mathbf{h} \sin 2\mathbf{y} \\ - \sin 2\mathbf{h} \sin \mathbf{x} \cos 2\mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (16c)$$

印加電界の大きさおよび方向は自由に選ぶことができるが，光デバイスへの応用上次の3つのケースが特に重要である。

### 5.1 1つの結晶軸に平行に電界を加える場合

ここでは， $E_1 = E_2 = 0$ ， $E_3 = E$ について検討する。検討する結晶が等方性であるから， $E_2 = E_3 = 0$ ， $E_1 = E$ あるいは $E_1 = E_3 = 0$ ， $E_2 = E$ でも結果は同じである。このケースでは，光デバイスとして後段に掲示する表2の図(d)，(e)の2つの構成が有望である。いずれの構成も $\alpha = 0$ ， $\beta = 0$ ， $\gamma = -45^\circ$ であり，これらを式(16)に代入すると，下式の屈折率を得る。

$$n'_1 = n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E \quad (17a)$$

$$n'_2 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E \quad (17b)$$

$$n'_3 = n_0 \quad (17c)$$

次に逆圧電効果が与える光路長変化を求める。立方晶系の圧電定数 $d_{ji}$ は

$$d_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

で与えられるから，式(18)，式(11)および式(8)を用いると，表2の図(d)，(e)の光進行方向の歪 $S_3$ および $S'_2$ は以下の式で与えられる。

$$S_3 = 0$$

$$S'_2 = S_{12} = \frac{S_6}{2} = \frac{1}{2} d_{14} E \quad (19)$$

式(17)と式(19)を式(1)に代入すると、表2の図(d)の $X_3$ 方向に伝播し、 $X_1$ 方向あるいは $X_2$ 方向に振動する直線偏光の位相変化 $q'_{X1}$ 、 $q'_{X2}$ は、それぞれ以下の式で与えられる。

$$q'_{X1} = \frac{P}{I} n_o^3 r_{41} \ell E$$

$$q'_{X2} = -\frac{P}{I} n_o^3 r_{41} \ell E \quad (20)$$

また表2の図(e)の $X'_2$ 方向に伝播し、 $X_3$ 方向あるいは $X'_2$ 方向に振動する直線偏光の位相変化 $q'_{X1}$ 、 $q'_{X3}$ は、それぞれ以下の式で与えられる。

$$q'_{X1} = \frac{P}{I} n_o^3 \ell E \left( r_{41} + \frac{d_{14}}{n_o^2} \right)$$

$$q'_{X3} = \frac{P}{I} n_o d_{14} \ell E \quad (21)$$

$r_{41}$ 、 $d_{14}$ となるような結晶では逆圧電効果に基づく光路長変化の影響は無視できるが、 $d_{14}$ 、 $r_{41}$ の結晶ではその影響は大きい。たとえばGaAs結晶の圧電定数 $d_{14}$ は2.60 pC/Nであり、電気光学係数 $r_{41}$ (1.1 pm/V)の約2.4倍にもなるため、そのデバイス設計には特に注意が必要である。<sup>10</sup>

## 5.2 2つの結晶軸に平行に同じ大きさの電界を加える場合

このケースの典型例として、 $E_1 = E_2 = E / \sqrt{2}$ 、 $E_3 = 0$ を検討する。幾何学的構成を表2の図(a)、(b)に示す。この構成では $\theta = 45^\circ$ 、 $\phi = 0$ 、 $\psi = 45^\circ$ である。5.1小節と同じ段取りで、これらの回転角度を式(16)に代入して屈折率を求める。また、式(11)、式(12)、式(13)および式(8)を用いて歪を計算する。それらの結果を式(1)に代入すると、表2の図(a)、(b)における4つの位相変化を得る。



また，式(22c)より

$$2\cos 2x \sin y + 2\cos 2x \cos y + \sin 2x \sin 2y = 0, \quad (23e)$$

$$\sin x \sin y - \sin x \cos y + \cos x \cos 2y = 0. \quad (23f)$$

式(23)をすべて満足する回転角度は

$$\begin{aligned} x &= -\sin^{-1}(1/\sqrt{3}), \\ y &= \pi/4 \end{aligned} \quad (24)$$

である。すなわち，印加電界方向と $X'_1$ 軸を結晶の[111]方向にすると， $X'_2$ ， $X'_3$ 軸を(111)面内で任意の方向に設定でき，同面内において光の入射方向を自由に選択することが可能になる。

$X'_1$ ， $X'_2$ ， $X'_3$ 方向の屈折率 $n'_1$ ， $n'_2$ ， $n'_3$ は式(24)を式(7)に代入し， $E_1 = E_2 = E_3 = E/\sqrt{3}$ を適用すれば，次式を得る。

$$n'_1 = n_0 - \frac{1}{\sqrt{3}} n_0^3 g_{41} E, \quad (25a)$$

$$n'_2 = n'_3 = n_0 + \frac{1}{2\sqrt{3}} n_0^3 g_{41} E. \quad (25b)$$

一方， $X'_1$ ， $X'_2$ ， $X'_3$ 方向の歪テンソル $S''_{11}$ ， $S''_{22}$ ， $S''_{33}$ は，式(24)および式(18)を式(11)，(12)，(13)に代入し， $E_1 = E_2 = E_3 = E/\sqrt{3}$ を適用すると

$$S''_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} d_{14} E, \quad (26a)$$

$$S''_{22} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} d_{14} E, \quad (26b)$$

$$S''_{33} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} d_{14} E \quad (26c)$$

となる。

ここで，光の電界が $X'_1$ あるいは $X'_2$ 方向に振動する直線偏光が $X'_3$ 方向にそって結晶中を進むとき， $X'_1$ 方向に印加された電界による光の位相変化は，式(25a)，(25b)から得られる屈折率変化と式(26c)で表される $X'_3$ 方向の単位長あたりの結晶長変化を式(1)に代入することにより，それぞれ次式のように与えられる。

$$q'_{x1} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{I} n_0^3 E \left( g_{41} - \frac{d_{14}}{2n_0^2} \right), \quad (27a)$$

$$q'_{x2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{I} n_0^3 E \left( g_{41} - \frac{d_{14}}{n_0^2} \right) \quad (27b)$$

## 6. 一軸性結晶を透過する光の印加電界による位相変化

一軸性結晶の印加電界による屈折率変化は， $n_1 = n_2 = n_0$ と $n_3 = n_e$  ( $n_e$ は異常光線屈折率)を式(7)に代入すれば得られるが，その交差項係数 $a_4$ ， $a_5$ ， $a_6$ は，等軸性結晶と異なり次式に示すように印加電界に依存しない項 $a_4$ ， $a_5$ ， $a_6$ をそれぞれ持つ。

$$a_4 = \sin 2h \cos^2 x \left( \frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_0^2} \right), \quad (28a)$$

$$a_5 = \cos h \sin 2x \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_e^2} \right), \quad (28b)$$

$$a_6 = \sin h \sin^2 x \left( \frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n_e^2} \right). \quad (28c)$$

従って $h=0$ および $x=0$ の場合には， $a_4$ ， $a_5$ ， $a_6$ は無視できない大きさを持つため， $r_{4m}$ ， $r_{5m}$ ， $r_{6m}$ 等の電気光学係数で表される屈折率変化を求めることは困難である。しかし， $h$ および $x$ のうち少なくとも1つを0にすると， $a_4$ ， $a_5$ ， $a_6$ のうち少なくとも2つが0になるため，この場合，電界による屈折率変化を容易に知ることができる。すなわち， $x=0$ を光軸( $Z$ 軸)とする一軸性結晶では， $h=0$ を軸として $x$ に垂直な面を回転する場合 ( $h$ は任意の角度， $x=0$ )と $h=0$ を含む面を回転する場合(例えば $h$ は任意の角度， $x=0$ )の屈折率変化は容易に求めることができる。この2つのケースは一軸性結晶の電気光学効果を考察するのに有効であり，かつ，光デバイスに利用される光の伝搬方向と印加電界方向の関係は，これらのいずれかに属するものが多い。

ここでは，光軸 $x=0$ を軸として $x$ に垂直な面を任意の角度 $h$ だけ回転する場合の屈折率を導出する。結晶中の光の伝搬方向を $z'$ に平行にすると，式(6)は

$$A_1 X_1'^2 + A_3 X_3'^2 + A_5 X_1' X_3' = 1 \quad (29)$$

で与えられる。ここで係数  $A_1, A_3, A_5$  は、 $A_2 = 0$  を式(7a), (7c), (7e)に代入することにより、それぞれ次式で与えられる。

$$A_1 = \frac{1}{n_0^2} (r_{1m} \cos^2 \mathbf{y} + r_{2m} \sin^2 \mathbf{y} + r_{6m} \sin 2\mathbf{y}) E_m, \quad (30a)$$

$$A_3 = \frac{1}{n_e^2} r_{3m} E_m, \quad (30b)$$

$$A_5 = 2(r_{4m} \sin \mathbf{y} + r_{5m} \cos \mathbf{y}) E_m. \quad (30c)$$

式(29)を交差項を持たない式に変換することは、2次曲線の主軸変換であり、式(29)の固有値導出問題に帰着する。その固有値  $k$  は

$$k = \frac{A_1 + A_3 \pm \sqrt{(A_1 - A_3)^2 + A_5^2}}{2} \quad (31)$$

で与えられる。ここで式(30)より得られる関係  $(A_1 - A_3)^2 + A_5^2$  を式(31)に適用すると、固有値  $k$  は次式で与えられる。

$$k \cong A_1, A_3. \quad (32)$$

従って  $X_1$  および  $X_3$  方向の屈折率  $n_1'$  および  $n_3'$  は、それぞれ次式で表される。

$$n_1' = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 (r_{1m} \cos^2 \mathbf{y} + r_{2m} \sin^2 \mathbf{y} + r_{6m} \sin 2\mathbf{y}) E_m, \quad (33a)$$

$$n_3' = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{3m} E_m. \quad (33b)$$

光が  $X_1$  方向に平行に伝搬する場合の  $X_2$  方向の屈折率変化も同様にして求めることができ、その値は式(33a)の  $r$  の添字の 1 と 2 を交換し、 $r_{6m}$  の符号を変えた式で表される。

また、光の進行方向が  $X_3$  に平行な場合は、式(6)は

$$A_1 X_1'^2 + A_2 X_2'^2 + A_6 X_1' X_2' = 1. \quad (34)$$

となる。ここで  $A_1$  は式(30a)で与えられ、 $A_2$  および  $A_6$  は  $A_2 = 0$  を式(7b)および(7f)に代入すること

により、それぞれ次式で表される。

$$A_2 = \frac{1}{n_0^2} (r_{1m} \sin^2 \mathbf{y} + r_{2m} \cos^2 \mathbf{y} - r_{6m} \sin 2\mathbf{y}) E_m, \quad (35a)$$

$$A_6 = [(r_{2m} - r_{1m}) \sin 2\mathbf{y} + 2r_{6m} \cos 2\mathbf{y}] E_m. \quad (35b)$$

式(34)の固有値  $k$  は

$$k = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{n_0^2} (r_{1m} + r_{2m}) E_m \pm E_m \sqrt{(r_{1m} - r_{2m})^2 + 4r_{6m}^2} \right] \quad (36)$$

であたえられるため、 $X_1', X_2'$  方向の屈折率  $n_1', n_2'$  はそれぞれ次式で表される。

$$n_1' = n_0 - \frac{1}{4} n_0^3 E_m \left[ r_{1m} + r_{2m} + \sqrt{(r_{1m} - r_{2m})^2 + 4r_{6m}^2} \right], \quad (37a)$$

$$n_2' = n_0 - \frac{1}{4} n_0^3 E_m \left[ r_{1m} + r_{2m} - \sqrt{(r_{1m} - r_{2m})^2 + 4r_{6m}^2} \right]. \quad (37b)$$

光軸を含む面を回転させる場合も同様にして屈折率変化を求めることができるが、ここでは省略する。 $X_1', X_2', X_3'$  方向の歪テンソル成分  $S'_{11}, S'_{22}, S'_{33}$  は、式(11)に  $A_2 = 0$  を代入し、式(8)を用いると、次式で表される。

$$S'_{11} = S'_{11} = \left( d_{m1} \cos^2 \mathbf{y} + d_{m2} \sin^2 \mathbf{y} + \frac{1}{2} d_{m6} \sin 2\mathbf{y} \right) E_m, \quad (38a)$$

$$S'_{22} = S'_{22} = \left( d_{m1} \sin^2 \mathbf{y} + d_{m2} \cos^2 \mathbf{y} - \frac{1}{2} d_{m6} \sin 2\mathbf{y} \right) E_m, \quad (38b)$$

$$S'_{33} = S'_{33} = d_{m3} E_m. \quad (38c)$$

従って、光の電界が  $X_1'$  あるいは  $X_3'$  方向に振動する直線偏光が  $X_2'$  方向にそって結晶中を伝搬するとき、電界  $E_m$  による光の位相変化  $q'_{X_3}$  および  $q'_{X_1}$  は、式(33a), (33b) および式(38b) を式(1)に代入することにより、それぞれ次式で与えられる。

$$q'_{X_1} = -\frac{1}{I} n_0^3 E_m \left[ r_{1m} \cos^2 \mathbf{y} + r_{2m} \sin^2 \mathbf{y} + r_{6m} \sin 2\mathbf{y} - \frac{2}{n_0^2} \left( d_{m1} \sin^2 \mathbf{y} + d_{m2} \cos^2 \mathbf{y} - \frac{1}{2} d_{m6} \sin 2\mathbf{y} \right) \right], \quad (39a)$$

$$\mathbf{q}'_{x3} = -\frac{1}{I} n_0^3 E_m \left[ r_{3m} - \frac{2}{n_e^2} \left( d_{m1} \sin^2 \mathbf{y} + d_{m2} \cos^2 \mathbf{y} - \frac{1}{2} d_{m6} \sin 2\mathbf{y} \right) \right] \quad (39b)$$

$X'_2$  方向に偏光し  $X'_1$  方向に伝搬する光の印加電界による位相変化も同様にして求めることができ、その値は式(39a)の  $r$  および  $d$  の添字 1 と 2 を交換し、 $r_{6m}$  と  $d_{m6}$  の符号を変えた式で表される。

また、光の進行方向が  $X'_3$  に平行で、かつ  $X'_1$  あるいは向に  $X'_2$  方向に直線偏光した光の位相変化  $\mathbf{q}'_{x1}$  および  $\mathbf{q}'_{x2}$  は、式(37a)、(37b)および式(38c)を式(1)に代入することにより、それぞれ次式で与えられる。

$$\mathbf{q}'_{x1} = -\frac{1}{2I} n_0^3 E_m \left[ r_{1m} + r_{2m} + \sqrt{(r_{1m} - r_{2m})^2 + 4r_{6m}^2} - \frac{4}{n_0^2} d_{m3} \right] \quad (40a)$$

$$\mathbf{q}'_{x2} = -\frac{1}{2I} n_0^3 E_m \left[ r_{1m} + r_{2m} - \sqrt{(r_{1m} - r_{2m})^2 + 4r_{6m}^2} - \frac{4}{n_0^2} d_{m3} \right] \quad (40b)$$

光軸  $X_3$  を含む面を回転する場合も同様に電界による光の位相変化を明らかにすることができるが、ここでは省略する。

次に応用上特に重要と考えられる結晶の属する点群 4mm、 $\bar{4}2m$ 、3m および 6 における結晶透過光の印加電界による位相変化を明らかにする。これらの点群の電気光学係数および圧電定数を以下に記す。

点群 4mm の電気光学係数  $r_{ij}$  と圧電定数  $d_{ji}$   
 代表的な結晶：BaTiO<sub>3</sub>、KTaNb<sub>1-x</sub>O<sub>3</sub> (KTN)、  
 Ba<sub>0.25</sub>Sr<sub>0.75</sub>Nb<sub>2</sub>O<sub>6</sub>

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

点群  $\bar{4}2m$  の電気光学係数  $r_{ij}$  と圧電定数  $d_{ji}$   
 代表的な結晶：KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> (KDP)、KD<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> (KD\*P)、  
 (NH<sub>4</sub>)H<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> (ADP)、(NH<sub>4</sub>)D<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>、  
 (AD\*P)、CsH<sub>2</sub>AsO<sub>4</sub>、AgGaS<sub>2</sub>

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{pmatrix}, \quad d_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix} \quad (42)$$

点群 3m の電気光学係数  $r_{ij}$  と圧電定数  $d_{ji}$   
 代表的な結晶：LiNbO<sub>3</sub> (LN)、LiTaO<sub>3</sub> (LT)、Ag<sub>3</sub>AsS<sub>3</sub>

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -2r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

点群 6 の電気光学係数  $r_{ij}$  と圧電定数  $d_{ji}$   
 代表的な結晶：LiIO<sub>3</sub>

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ r_{41} & r_{51} & 0 \\ r_{51} & -r_{42} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d_{ji} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

式(41)から式(44)までを式(39)、式(40)などに代入すれば、これらの点群における電界に誘起された光の位相変化を明らかにすることが出来る。その結果を表 3 から表 6 にまとめて示す。表中の図に記された  $S$  は光の進行方向を表す。光軸が結晶の入射端面に平行あるいは垂直でない場合には、光は結晶内で常光線と異常光線に分離して伝播する。光が結晶端面に垂直入射する場合、その分離角  $f$  は、

$$f = \tan^{-1} \left[ \frac{(n_e^2 - n_0^2) \sin 2\mathbf{r}}{n_0^2 + n_e^2 + (n_e^2 - n_0^2) \cos 2\mathbf{r}} \right] \quad (45)$$

で与えられる。(付録)ここで  $\mathbf{r}$  は光軸と光の入射方向とのなす角である。

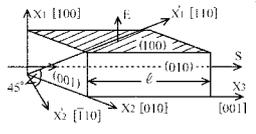
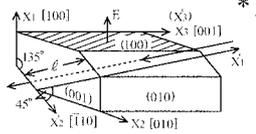
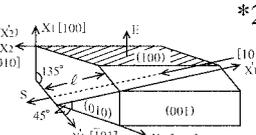
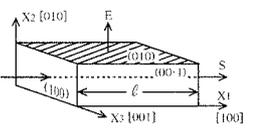
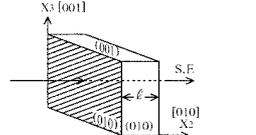
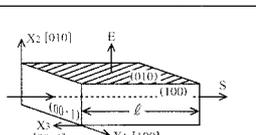
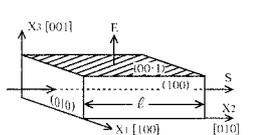
表3 点群  $4mm$  の結晶類における印加電界方向と透過光の位相変化の関係

| applied electric fields           | rectangular coordinate axes   | induced refractive indices   | induced phase shifts   | directions of optical path S and applied electric field E |
|-----------------------------------|---|--|--|---|
| $E_1 = E$<br>$E_2 = E_3$<br>$= 0$ | $x'_1 = \frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}$<br>$x'_2 = x_2$<br>$x'_3 = \frac{-x_1 + x_3}{\sqrt{2}}$ | $n'_2 = n_0$<br>$n'_3 = n_{0e} + \frac{1}{2} n_0^3 r_{51} E$                                       | $\theta_{x'_2} = \frac{\pi}{\lambda} n_0 d_{15} \ell E$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_{0e}^3 \ell E \left( r_{51} + \frac{d_{15}}{n_{0e}^2} \right)$   | (a)   |
| $E_3 = E$<br>$E_1 = E_2$<br>$= 0$ | $x'_1 = x_1$<br>$x'_2 = x_2$<br>$x'_3 = x_3$  | $n'_1 = n'_2$<br>$= n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{13} E$<br>$n'_3 = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E$ | $\theta_{x'_2} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{13} - \frac{2}{n_0^2} d_{31} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = -\frac{\pi}{\lambda} n_e^3 \ell E \left( r_{33} - \frac{2}{n_e^2} d_{31} \right)$ | (b)   |

表4 点群  $\bar{4}2m$  の結晶類における印加電界方向と透過光の位相変化の関係

| applied electric fields           | rectangular coordinate axes   | induced refractive indices   | induced phase shifts   | directions of optical path S and applied electric field E |
|-----------------------------------|---|--|--|---|
| $E_1 = E$<br>$E_2 = E_3$<br>$= 0$ | $x'_1 = x_1$<br>$x'_2 = \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{2}}$<br>$x'_3 = \frac{-x_2 + x_3}{\sqrt{2}}$ | $n'_1 = n_0$<br>$n'_3 = n_{0e} + \frac{1}{2} n_0^3 r_{41} E$   | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0 d_{14} \ell E$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_{0e}^3 \ell E \left( r_{41} + \frac{d_{14}}{n_{0e}^2} \right)$ | (a)   |
| $E_3 = E$<br>$E_1 = E_2$<br>$= 0$ | $x'_1 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$<br>$x'_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$<br>$x'_3 = x_3$  | $n'_1 = n_0 + \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E$<br>$n'_2 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{63} E$<br>$n'_3 = n_e$ | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{63} \ell E$<br>$\theta_{x'_2} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{63} \ell E$  | (b)   |
|                                   |   |  | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{63} + \frac{d_{36}}{n_0^2} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_e d_{36} \ell E$       | (c)   |

表5 点群 3m の結晶類における印加電界方向と透過光の位相変化の関係

| applied electric fields      | rectangular coordinate axes   | induced refractive indices   | induced phase shifts   | directions of optical path S and applied electric field E                                  |
|------------------------------|---|--|--|--|
| $E_1 = E$<br>$E_2 = E_3 = 0$ | $x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$<br>$x'_2 = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$<br>$x'_3 = x_3$ | $n'_1 = n_0 + \frac{1}{2}n_0^3 r_{22} E$<br>$n'_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 r_{22} E$   | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{22} \ell E$<br>$\theta_{x'_2} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{22} \ell E$  | (a)  *1 |
|                              |   | $n'_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 r_{22} E$<br>$n'_3 = n_e$   | $\theta_{x'_2} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{22} + \frac{2}{n_0^2} d_{22} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{2}{\lambda} \pi n_e d_{22} \ell E$   | (b)  *1 |
|                              | $n'_2 = n_0$<br>$n'_3 = n_{0e} + \frac{1}{2}n_{0e}^3 r_{51} E$                              | $\theta_{x'_2} = \frac{\pi}{\lambda} n_0 d_{15} \ell E$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_{0e}^3 \ell E \left( r_{51} + \frac{d_{15}}{n_{0e}^2} \right)$ | (c)  *2   |  |
| $E_2 = E$<br>$E_1 = E_3 = 0$ | $x'_1 = x_1$<br>$x'_2 = x_2$<br>$x'_3 = x_3$  | $n'_1 = n_0 + \frac{1}{2}n_0^3 r_{22} E$   | $\theta_{x'_2} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{22} + \frac{2}{n_0^2} d_{22} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = -\frac{2}{\lambda} \pi n_e d_{22} \ell E$   | (d)    |
|                              |   | $n'_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 r_{22} E$   | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{22} + \frac{2}{n_0^2} d_{22} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{2}{\lambda} \pi n_e d_{22} \ell E$   | (e)   |
|                              |   | $n'_3 = n_e$   | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{22} \ell E$<br>$\theta_{x'_2} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 r_{22} \ell E$  | (f)   |
| $E_3 = E$<br>$E_1 = E_2 = 0$ |   | $n'_1 = n'_2 = n_0 - \frac{1}{2}n_0^3 r_{13} E$<br>$n'_3 = n_c - \frac{1}{2}n_c^3 r_{33} E$  | $\theta_{x'_1} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 \ell E \left( r_{13} - \frac{2}{n_0^2} d_{31} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = -\frac{\pi}{\lambda} n_c^3 \ell E \left( r_{33} - \frac{2}{n_c^2} d_{31} \right)$ | (g)   |

\*1 The axes  $x'_1$  and  $x'_2$  lie in the  $(00 \cdot 1)$  plane and make angles of  $\pm 45^\circ$  with  $x_2$ , respectively.

\*2 The axes  $x'_1$  and  $x'_3$  lie in the  $(11 \cdot 0)$  plane and make angles of  $\mp 45^\circ$  with  $x_3$ , respectively.

表 6 点群 6 の結晶類における印加電界方向と透過光の位相変化の関係

| applied electric fields      | rectangular coordinate axes   | induced refractive indices  | induced phase shifts   | directions of optical path S and applied electric field E |
|------------------------------|---|---|--|---|
| $E_1 = E$<br>$E_2 = E_3 = 0$ | $x'_1 = x_1$<br>$x'_2 = \frac{x_2 + x_3}{\sqrt{2}}$<br>$x'_3 = \frac{-x_2 + x_3}{\sqrt{2}}$ | $n'_1 = n_0$<br>$n'_3 = n_{0e} + \frac{1}{2} n_{0e}^3 r_{41} E$                               | $\theta_{x'_1} = \frac{\pi}{\lambda} n_0 d_{14} l E$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_{0e}^3 l E \left( r_{41} + \frac{d_{14}}{n_{0e}^2} \right)$   | (a)   |
| $E_3 = E$<br>$E_1 = E_2 = 0$ | $x'_1 = \frac{x_1 + x_3}{\sqrt{2}}$<br>$x'_2 = x_2$<br>$x'_3 = \frac{-x_1 + x_3}{\sqrt{2}}$ | $n'_2 = n_0$<br>$n'_3 = n_{0e} + \frac{1}{2} n_{0e}^3 r_{51} E$                               | $\theta_{x'_2} = \frac{\pi}{\lambda} n_0 d_{15} l E$<br>$\theta_{x'_3} = \frac{\pi}{\lambda} n_{0e}^3 l E \left( r_{51} + \frac{d_{15}}{n_{0e}^2} \right)$   | (b)   |
| $E_3 = E$<br>$E_1 = E_2 = 0$ | $x'_1 = x_1$<br>$x'_2 = x_2$<br>$x'_3 = x_3$  | $n'_1 = n'_2 = n_0 - \frac{1}{2} n_0^3 r_{13} E$<br>$n'_3 = n_e - \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} E$ | $\theta_{x'_1} = -\frac{\pi}{\lambda} n_0^3 l E \left( r_{13} - \frac{2}{n_0^2} d_{31} \right)$<br>$\theta_{x'_3} = -\frac{\pi}{\lambda} n_e^3 l E \left( r_{33} - \frac{2}{n_e^2} d_{31} \right)$ | (c)   |

## 7. 逆電圧効果が電気光学係数の測定および光デバイス設計に与える影響

電気光学係数の測定方法は Michelson 干渉法や Mach-Zehender 干渉法のように電界による光の位相変化を検出する位相検出法<sup>8, 9, 11</sup>と, Senarmont 法<sup>12-15</sup>のように互いに直交した2つの直線偏光の間の印加電界による位相差(リタデーション)を検出するリタデーション検出法とに大別される。初めに位相検出法で電気光学係数を測定する場合について考察する。表2から表6の解析結果が示すように, 多くの場合光の位相変化は電気光学効果と共に逆電圧効果の影響も受けるため, 位相検出法を用いた低周波領域の測定では, 応力一定の状態にある結晶の電気光学係数と圧電定数からなる係数を直接求めることができる。この係数は光偏向器や分岐干渉型光変調器のように光の位相変化を直接利用する素子の設計に有用であり, 本論文では実効的電気光学係数  $r'$  と呼ぶことにする。式(39a)を例にとると  $r'$  は次式で与えられる。

$$r' = r_{1m} \cos^2 \mathbf{y} + r_{2m} \sin^2 \mathbf{y} + r_{6m} \sin 2\mathbf{y} - \frac{2}{n_0^2} (d_{m1} \sin^2 \mathbf{y} + d_{m2} \cos^2 \mathbf{y} - \frac{1}{2} d_{m6} \sin 2\mathbf{y}) \quad (46)$$

これまでに, 点群 4, 4mm, 3, 3m, 6 および 6mm に属する結晶の電気光学係数  $r_{13}, r_{33}$  など, リタデーション検出法では電気光学係数と圧電定数を分離

して測定することが困難な係数をはじめとして, 様々な結晶の電気光学係数が位相検出法を用いて測定されている。これまでの解析で明らかのように, 逆電圧効果を見逃さない低周波領域で測定された従来の係数の値は, 応力一定の状態にある結晶の電気光学係数ではなく, 実効的電気光学係数である場合が多い。これらのデータの中には  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{LiTaO}_3$  および  $\text{CdS}$  など応用上重要な結晶の係数  $r_{13}, r_{33}$  の測定値も含まれている。多くの結晶の圧電定数は明らかになっているから, 実効的電気光学係数が明らかであれば, 応力一定の状態にある結晶の電気光学係数を求めることが出来そうであるが, そうではない。

位相検出法を用いて応力一定の状態にある結晶の電気光学係数を求めるためには, さらにもうひとつの条件である「実効的電気光学係数と圧電定数の相対的符号関係」を知る必要がある。これまでに相対的符号関係が明らかになっているのは, 点群  $\bar{4}2m$  に属する KDP 結晶および ADP 結晶だけである。<sup>2</sup> 実用上有望な電気光学結晶の符号関係は, 早急に明らかにしなければならない。筆者はこの研究を進めているが, その報告は別の機会にしたい。

次にリタデーション検出法で電気光学係数を測定する場合について考察する。表2の図(c)に示すような印加電界方向を持つ等軸性結晶においては, 互いに直交する2つの直線偏光の間の印加電界による位相差は

$$\Delta q = q_{x'_1} - q_{x'_2} = \frac{\sqrt{3}}{l} n_0^3 r_{41} l E \quad (47)$$

で与えられる。また、表5の図(g)に示すような印加電界方向を持つ一軸性結晶においては、2つの直線偏光の間の位相差は

$$\Delta q = q_{x1} - q_{x3} = \frac{1}{I} n_e^3 l E \left[ r_{33} - \left( \frac{n_o}{n_e} \right)^3 r_{13} \right] + \frac{2}{I} (n_o - n_e) d_{31} l E$$

$$\cong \frac{1}{I} n_e^3 l E \left[ r_{33} - \left( \frac{n_o}{n_e} \right)^3 r_{13} \right] \quad (48)$$

で与えられる。ここで右辺の第2項は第1項に比べて一般に非常に小さいためこれを省略することができる。

以上の2例が示すようにリタレーション検出法を用いると、光路長変化の影響を考慮せずに応力一定の状態にある結晶の電気光学係数を直接求めることができる。しかし、リタレーション検出法で測定された低周波領域の電気光学係数を用いて光の位相変化を直接利用する素子を設計する場合には、逆圧電効果に基づく光路長変化を考慮しなければならない。

本節ではこれら2つの測定法で求められる電気光学係数の特徴と、その測定値を光デバイス設計に利用する場合の注意すべき点を示した。これまでに多くの結晶の低周波領域の電気光学係数が測定されているが、これらの係数を用いて光デバイスを設計するには、そのデータがどちらの検出法（リタレーション検出法あるいは位相検出法）によるものかを十分チェックしておく必要がある。

## 8. 結論

本論文で行った解析とその主な結果を取りまとめると次のようになる。

- (1) 結晶透過光の印加電界による位相変化は、電気光学効果に基づく屈折率変化と逆圧電効果に基づく光路長変化に依存することを明らかにし、等軸性および一軸性結晶に電界を印加したときの屈折率変化および歪テンソルの変化を解析した。
- (2) 光デバイスへの応用上重要な結晶類の属する点群  $\bar{4}3m$ ,  $23$ ,  $4mm$ ,  $\bar{4}2m$ ,  $3m$ , および  $6$  における代表的な印加電界方向と光の位相変化の関係を明らかにした。
- (3) Michelson 干渉法や Mach-Zehnder 干渉法で代表される位相検出法は、応力一定の状態にある結晶の電気光学係数と圧電定数からなる実効

的電気光学係数を求めるものである。点群  $4$ ,  $4mm$ ,  $3$ ,  $3m$ ,  $6$  および  $6mm$  に属する結晶の電気光学係数  $r_{13}$  および  $r_{33}$  は、主として位相検出法により測定されているため、低周波領域におけるこれまでの測定値の多くは実効的電気光学係数である。

- (4) 2つの直線偏光の間の印加電界による位相変化を検出するリタレーション検出法は、応力一定の状態にある結晶の電気光学係数を直接求めるものである。一方、この電気光学係数を用いて光偏向器や分岐干渉型光変調器のように光の位相変化を直接利用するデバイスを設計する場合には、逆圧電効果に基づく光路長変化を考慮しなければならない。

## [付録]

一軸結晶中の常光線と異常光線の分離角の導出

正の一軸結晶の屈折率楕円体を異常光線の波面法線  $A$  と結晶の光軸  $X_3$  とを含む平面で切断した状態を図 A.1 に示す。光が結晶端面に垂直に入射する場合、 $A$  は常光線の波面法線とも一致する。従って、ポインティングベクトルを  $P$  とすると、図 A.1 に示すように  $\angle P'ON = f$  が結晶中の常光線と異常光線の分離角を表す。ここで、光波の電界を  $E$ 、電束密度を  $D$  とすると、 $E \perp P$  および  $D \perp A$  の関係より、 $E$  と  $D$  のなす角が両光線の分離角に等しくなる。

従って波面法線  $A$  と光軸  $X_3$  とのなす角を  $r$  とすると、図 A.1 より次式を得る。

$$\tan r = \frac{D_{X_3}}{D_{X_1}} = \frac{n_e^2 E_{X_3}}{n_o^2 E_{X_1}} = \left( \frac{n_e}{n_o} \right)^2 \tan(r - f) \quad (A \cdot 1)$$

ただし、 $D_{X_1}, D_{X_3}$  は電束密度の  $X_1$  および  $X_3$  方向の成分であり、 $E_{X_1}, E_{X_3}$  は光の電界の  $X_1$  および  $X_3$  方向の成分である。式(A・1)を について解くと次式を得る。

$$f = \tan^{-1} \left[ \frac{(n_e^2 - n_o^2) \sin 2r}{n_o^2 + n_e^2 + (n_e^2 - n_o^2) \cos 2r} \right] \quad (A \cdot 2)$$

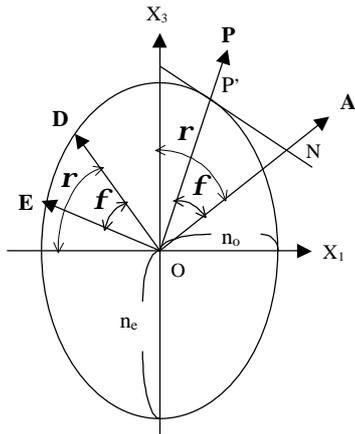


図 A.1 正の一軸結晶の屈折率楕円体の主断面

### 参考文献

1. K. Takizawa and M. Okada, "Simple method for measuring electro-optic coefficients by detecting the interference signal between transmitted and reflected beams," *J. Opt. Soc. Am.* **72**, 809-811 (1982).
2. K. Takizawa and M. Okada, "Determination of relative signs of electro-optic and piezoelectric coefficients by measuring optical phase shifts caused by an applied electric field," *J. Opt. Soc. Am.* **B 2**, 289-293 (1985).
3. K. Takizawa, "Analysis of electro-optic crystal-based Fabry-Perot etalons for high-speed spatial light modulators," *Appl. Opt.* **42**, 1052-1067 (2003).
4. 小林慎治, 菊池 宏, 滝沢國治, 「ポッケルス効果と逆圧電効果を利用した縦型光変調素子の設計」, *信学論 C*, **J86-C**, 83-85 (2003).
5. 滝沢國治, 「高速空間光変調素子用電気光学ファブリ・ペロー共振器の解析」, *成蹊大学光学研究報告*, Vol.40, No.2, 57-72, (2003).
6. 菊池 宏, 小林慎治, 滝沢國治, 「ポッケルス効果と逆圧電効果に基づく縦型光変調素子の解析と実験的検証」, *信学論 C*, **J87-C**, 276-277 (2004).
7. 滝沢國治, 小林慎治, 菊池 宏, 「電気光学効果と逆圧電効果を利用した縦型光変調素子」, *成蹊大学工学研究報告*, Vol.41, No.1, 21-27, (2004).
8. J. D. Zook, D. Chen and G. N. Otto, "Temperature dependence and model of the electro-optic effect in  $\text{LiNbO}_3$ ," *Appl. Phys. Lett.* **11**, 159-161, (1967).
9. K. Onuki, N. Uchida and T. Saku, "Interferometric method for measuring electro-optic coefficients in crystals," *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 1030-1033, (1972).
10. K. -H. Hellwege, Editor in chief, *LANDOLT BÖRNSTEIN, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Group III: Crystal and Solid State Physics, Vol.11, Elastic, Piezoelectric, Pyroelectric, Piezooptic, Electrooptic Constants, and Nonlinear Dielectric Susceptibilities of Crystals* (Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1979) pp.363,556.
11. V. V. Spirin, C. Lee and K. No, "measurement of the Pockels coefficient of lead zirconate titanate thin films by a two-beam polarization interferometer with a reflection configuration," *J. Opt. Soc. Am.* **15**, 1940-1946 (1998).
12. R. O'B. Carpenter, "The electro-optic effect in uniaxial crystals of the dihydrogen phosphate type," *J. Opt. Soc. Am* **40**, 225-229 (1950).
13. S. Mamba, "Electro-optic effect of zinblende," *J. Opt. Soc. Am* **51**, 76-79 (1961).
14. K. Takizawa, "A measurement of electrooptic coefficients using a Lissajous figure," *Opt. Commun.* **34**, 413-416 (1980).
15. L. Guilbert and J. P. Salvestrini, "Indirect Pockels effect in rubidium hydrogen selenate: measurement of the larger  $r_{42}$  coefficient," *J. Opt. Soc. Am. B* **17**, 1980-1985 (2000).